Matematyczna Liga Zadaniowa V LO
klasa pierwsza

Zadanie 1. Liczby rzeczywiste a i b spełniają równania

$$a+9=(b-3)^2 \quad \text{oraz} \quad b+9=(a-3)^2.$$

Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości jakie może przyjąć wyrażenie a^2+b^2.

Wpłynęły dwa rozwiązania tego zadania. W żadne nie zostało przedstawione w pełni poprawnie rozwiązane. Musimy pamiętać, że podanie nawet wszystkich poprawnych wyników nie jest jeszcze rozwiązaniem problemu.

Jeśli podajemy, że wyrażenie ma przyjąć ustaloną wartość, to musimy wykazać, że istnieją takie zmienne (np. przez ich wskazanie), dla których ta wartość jest osiągana.

Rozwiązanie

Korzystając ze wzoru na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń, dane równania możemy zapisać

$$\begin{cases} a+9=b^2-6b+9 \\ b+9=a^2-6a+9. \end{cases} \tag{1.1}$$

Odejmując stronamu równania układu (1.1), dostajemy

$$a-b=-(a-b)(a+b)-6(a-b),$$

skąd

$$(a-b)(a+b-5)=0.$$

Zatem $a=b$ lub $a+b=5$.

Jeżeli $a=b$, to $a=a^2-6a$. Stąd dostajemy $a=0$ lub $a=7$. Dla $a=0$ mamy $b=0$ i wtedy $a^2+b^2=0$, a dla $a=7$ mamy $b=7$ i stąd $a^2+b^2=98$. Łatwo sprawdzić, że pary $(a,b)\in\{(0,0),\,(7,7)\}$ spełniają dane w zadaniu równania.

Przejdźmy teraz do przypadku $a+b=5$. Dodając stronami równania układu $(1,1)$, otrzymujemy

$$a+b=a^2+b^2-6(a+b).$$

A skoro $a+b=5$, więc

$$a^2+b^2=7(a+b)=35.$$

Musimy jeszcze wykazać, że ta wartość jest osiągana. W przypadku $a=b$ wskazaliśmy liczby a, b spełniające dane w zadaniu równania i dla których wyrażenie a^2+b^2 osiąga wyznaczone wartości.

Aby wykazać, że wyrażenie a^2+b^2 może przyjąć wartość 35 rozwiążemy układ równań

$$\begin{cases} a+b=5 \\ a^2-6a=b. \end{cases}$$

Z pierwszego równania układu mamy $b=5-a$ i wstawiając to do równania drugiego, uzyskujemy

$$a^2-5a=5-a, \quad \text{czyli} \quad a^2-5a=5.$$

Korzystając ze wzoru na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń możemy to równanie zapisać

$$\left(a-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{45}{4}.$$

Stąd dostajemy

$$a-\frac{5}{2}=\frac{3\sqrt{5}}{2} \quad \text{lub} \quad a-\frac{5}{2}=-\frac{3\sqrt{5}}{2},$$

więc

$$a_1=\frac{5+3\sqrt{5}}{2}, \quad a_2=\frac{5-3\sqrt{5}}{2},$$

i stąd

$$b_1=\frac{5-3\sqrt{5}}{2}, \quad b_2=\frac{5+3\sqrt{5}}{2}.$$

Nietrudny rachunek pozwala stwierdzić, że powyższe pary spełniają równania dane w zadaniu oraz

$$a_1^2+b_1^2=a_2^2+b_2^2=35.$$

Zatem równość $a^2+b^2=35$ też zachodzi.

Odp.: Wyrażenie a^2+b^2 może przyjąć każdą z trzech wartości: 0, 35, 98.