Matematyczna Liga Zadaniowa V LO

klasa pierwsza

Zadanie 2. Wyznaczyć wszystkie pary (x, y) dodatnich liczb całkowitych spełniające równanie

$$(x+y)+(x-y)+x\cdot y+\frac{x}{y}=2000.$$

Wpłynęły trzy rozwiązania tego zadania, w tym jedno w pełni poprawne. Niestety, nie możemy za nie przyznać punktów, ponieważ nie wiemy kto jest jego autorem.

$x,y \in C \quad x,y > 0$

$x + y + x - y + x \cdot y + x/y = 2000$
$2x + x \cdot y + x/y = 2000$

Skoro x i y są liczbami całkowitymi to 2x oraz x·y również są liczbami całkowitymi.
Tego wynika że, x/y również musi być liczbą całkowitą aby suma tych trzech liczb też mogła być liczbą całkowitą.
Żeby x/y było liczbą całkowitą to:

$x/y = z \quad z \in N/0$

czyli
$x = y \cdot z$

$2y \cdot z + y \cdot z \cdot y + y \cdot z/y = 2000$
$2yz + y^2 z + z = 2000$
$z(2y + y^2 + 1) = 2000$
$z(y+1)^2 = 2000$

2000	5
400	5
80	5
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$2000 = 2^4 \cdot 5^3$

Iloczyn $z(y+1)^2$ jest na pewno liczbą całkowitą, gdyż mnożymy przez siebie trzy liczby całkowite.
Mamy 5 możliwości zapisania liczby 2000 jako iloczyn 3 liczba całkowitych w tym dwóch takich samych:

1. $2 \cdot 2 \cdot (2^2 \cdot 5^3)$
2. $2^2 \cdot 2^2 \cdot 5^3$
3. $2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot (2^2 \cdot 5)$
4. $5 \cdot 5 \cdot (2^4 \cdot 5)$
5. $2^2 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 5$
6. $1 \cdot 1 \cdot 2^4 \cdot 5^3$ - ten sposób można od razu wyeliminować bo y będzie równe 0 co byłoby sprzecznością z założeniem

Sposób 1:
$z = 2^2 \cdot 5^3$
$y = 2 - 1 = 1$
$x = y \cdot z = 2^2 \cdot 5^3 = 4 \cdot 125 = 500$
Sposób 2:
$z = 5^3$
$y = 2^2 - 1 = 3$

$x = y \cdot z = 5^3 \cdot 3 = 375$

Sposób 3:
$z = 2^2 \cdot 5$
$y = 2 \cdot 5 - 1 = 9$
$x = y \cdot z = 2^2 \cdot 5 \cdot 9 = 180$
Sposób 4:
$z = 2^4 \cdot 5$
$y = 5 - 1 = 4$
$x = y \cdot z = 2^4 \cdot 5 \cdot 4 = 320$
Sposób 5:
$z = 5$
$y = 2^2 \cdot 5 - 1 = 19$
$x = y \cdot z = 5 \cdot 19 = 95$

Pary dodatnich liczb całkowitych spełniające to równanie to:
1 i 500
3 i 375
9 i 180
4 i 320
19 i 95