Zadanie 4. Na tablicy zapisano liczby: 15, 22, 26, 38. Są to, zapisane w przypadkowej kolejności, wartości wyrażeń:

$$a+bc,\quad b+ca,\quad c+ab,\quad a+b+c$$

dla pewnych dodatnich liczb całkowitych a, b, c. Rozstrzygnąć, czy można jednoznacznie wyznaczyć liczby a, b i c.

Wpłynęło tylko jedno rozwiązanie tego zadania. Niestety, mimo poprawnych odpowiedzi, nie możemy go uznać za w pełni poprawne. Podawane w rozwiązaniach stwierdzenia należy uzasadniać, a w tej pracy nie ma żadnych uzasadnień.

Rozwiązanie

Wykażemy, że — z dokładnością do kolejności — liczby te można wyznaczyć jednoznacznie. Przyjmijmy oznaczenia

$$m=a+bc,\quad n=b+ca,\quad p=c+ab \quad \text{i} \quad s=a+b+c.$$

Gdyby każda z liczb a, b, c była parzysta, to również liczby m, n, p i s byłyby parzyste, a to jest sprzeczne z warunkami zadania.

Przyjmijmy, że wśród liczb a, b, c dokładnie jedna jest parzysta. Ze względu na to, że wyrażenia dane w zadaniu są symetryczne, możemy bez straty ogólności przyjąć, że liczbą tą jest a. Wtedy liczby m, n, p byłyby nieparzyste, a liczba s byłaby parzysta. To też jest sprzeczne z warunkami zadania.

Załóżmy teraz, że dokładnie dwie spośród liczb a, b, c są parzyste. Możemy przjąć, że są to liczby a i b. Ale wtedy liczby m i n byłyby parzyste, a p i s — nieparzyste, co też zachodzić nie może.

Pozostał przypadek, że wszystkie liczby są nieparzyste. W tym przpadku liczby m, n, p są parzyste, a liczba s — nieparzysta. Zatem

$$a+b+c=15.$$

Ze względu na symetrię wyrażeń możemy przyjąć, że $a\leqslant b\leqslant c$. Przy tym założeniu $15=a+b+c$, jeśli:

$$1^\circ\begin{cases}a=1\\b=1\\c=13,\end{cases}\quad 2^\circ\begin{cases}a=1\\b=3\\c=11,\end{cases}\quad 3^\circ\begin{cases}a=1\\b=5\\c=9,\end{cases}\quad 4^\circ\begin{cases}a=3\\b=3\\c=9,\end{cases}\quad 5^\circ\begin{cases}a=3\\b=5\\c=7.\end{cases}$$

Wtedy odpowiednio:

$$1^\circ\begin{cases}m=14\\n=14\\p=14\\s=15\end{cases}\quad 2^\circ\begin{cases}m=34\\n=14\\p=14\\s=15,\end{cases}\quad 3^\circ\begin{cases}m=46\\n=14\\p=14\\s=15,\end{cases}\quad 4^\circ\begin{cases}m=30\\n=30\\p=18\\s=15\end{cases}\quad 5^\circ\begin{cases}m=38\\n=26\\p=22\\s=15.\end{cases}$$

Zatem tylko przypadek 5° spełnia warunki zadania. Stąd $(a,b,c)=(3,5,7)$ oraz wszystkie ich permutacje.