Matematyczna Liga Zadaniowa V LO

klasa pierwsza

Zadanie 6. Dodatnie liczby rzeczywiste a_1, a_2, a_3, …, a_{98}, a_{99} spełniają warunek

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{98} < a_{99}.$$

Wykazać, że spełniona jest nierówność

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{98} + a_{99}}{a_{33} + a_{66} + a_{99}} < 33.$$

Wpłynęły cztery rozwiązania tego zadania – wszystkie w pełni poprawne.

Zadanie 6.

~~Mam nierówność~~

Z: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{98}, a_{99} \in R_+$, $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{98} < a_{99}$

T: $\dfrac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{98}+a_{99}}{a_{33}+a_{66}+a_{99}} < 33$

D: Z założenia wynika, że:

$$\text{I} \begin{cases} a_1 < a_{33} \\ a_2 < a_{33} \\ \vdots \\ a_{32} < a_{33} \end{cases} \qquad \text{II} \begin{cases} a_{34} < a_{66} \\ a_{35} < a_{66} \\ \vdots \\ a_{65} < a_{66} \end{cases} \qquad \text{III} \begin{cases} a_{67} < a_{99} \\ a_{68} < a_{99} \\ \vdots \\ a_{98} < a_{99} \end{cases}$$

$$a_1+a_2+\ldots+a_{32} < 32a_{33} \qquad a_{34}+a_{35}+\ldots+a_{65} < 32a_{66} \qquad a_{67}+a_{68}+\ldots+a_{98} < 32a_{99}$$

Dodając stronami nierówności, otrzymuję:

$$\begin{cases} \text{I} & a_1+a_2+\ldots+a_{32} < 32a_{33} \\ \text{II} & a_{34}+a_{35}+\ldots+a_{65} < 32a_{66} \\ \text{III} & a_{67}+a_{68}+\ldots+a_{98} < 32a_{99} \end{cases}$$

$\cancel{a_{34}+a_{35}+\ldots+a_{65} < 32a_{66}}$ $\cancel{a_{67}+a_{68}+\ldots+a_{98} < 32a_{99}}$

Również te nierówności mogę dodać stronami, uzyskuję:

$$(a_1+a_2+\ldots+a_{32})+(a_{34}+a_{35}+\ldots+a_{65})+(a_{67}+a_{68}+\ldots+a_{98}) < 32a_{33}+32a_{66}+32a_{99}$$

Jeżeli do obu stron nierówności dodam tę samą liczbę, wciąż będzie ona prawdziwa. Więc dodaję do obu stron liczbę $(a_{33}+a_{66}+a_{99})$.

$$(a_1+a_2+\ldots+a_{32})+(a_{34}+a_{35}+\ldots+a_{65})+(a_{67}+a_{68}+\ldots+a_{98}) < 32a_{33}+32a_{66}+32a_{99} \quad |+a_{33}+a_{66}+a$$

$$a_1+a_2+\ldots+a_{98}+a_{99} < 33(a_{33}+a_{66}+a_{99}) \quad |:(a_{33}+a_{66}+a_{99})$$

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{98}+a_{99}}{a_{33}+a_{66}+a_{99}} < 33$$

$$\begin{cases} a_{33} > 0 \\ a_{66} > 0 \\ a_{99} > 0 \end{cases}$$

$a_{33}+a_{66}+a_{99} > 0$

Suma większa od 0, więc przy dzieleniu przez nią nie zmieniam znaku nierówności na przeciwny.

Tym sposobem wykazałem, że teza jest prawdziwa, co kończy dowód.

Paweł Żurowski 1B

Paweł Mitręga I b

2: $a_1, a_2, \ldots, a_{99} \in R_+$

$a_1 < a_2 < \ldots < a_{99}$

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{99}}{a_{33} + a_{66} + a_{99}} < 33$$

Powyższą nierówność przekształcamy równoważnie ~~[illegible]~~ wiedząc iż $(a_{33}+a_{66}+a_{99})$ jest większe od 0

$a_1 + a_2 + \ldots + a_{99} < 33a_{33} + 33a_{66} + 33a_{99}$

$a_1 + a_2 + \ldots + a_{99} - 33a_{33} - 33a_{66} - 33a_{99} < 0$

dwie strony nierówności można ~~[illegible]~~ rozłożyć na sumę 3 składników

$(a_1 + \ldots + a_{33} - 33a_{33}) + (a_{34} + \ldots + a_{66} - 33a_{66}) + (a_{67} + \ldots + a_{99} - 33a_{99}) < 0$

$\underbrace{(a_1 + \ldots + a_{32} - 32a_{33})}_{x} + \underbrace{(a_{34} + \ldots + a_{65} - 32a_{66})}_{y} + \underbrace{(a_{67} + \ldots + a_{98} - 32a_{99})}_{z} < 0$

Oznaczamy kolejne składniki jako x, y, z, tak, że

$x + y + z < 0$

Wiemy, iż a_{33} jest większe od liczb od a_1 do a_{32}, a_{66} od a_{34} do a_{65} ~~a_{99}~~ i a_{99} od liczb od a_{67} do a_{98}

$\begin{cases} a_1 < a_{33} \\ a_2 < a_{33} \\ \ldots \\ a_{32} < a_{33} \end{cases} \Rightarrow a_1 + a_2 + \ldots + a_{32} < 32a_{33}$

$a_1 + a_2 + \ldots + a_{32} - 32a_{33} < 0$

$x < 0$

$\begin{cases} a_{34} < a_{66} \\ \ldots \\ a_{65} < a_{66} \end{cases} \Rightarrow a_{34} + \ldots + a_{65} < 32a_{66}$

$a_{34} + \ldots + a_{65} - 32a_{66} < 0$

$y < 0$

$\begin{cases} a_{67} < a_{99} \\ \ldots \\ a_{98} < a_{99} \end{cases} \Rightarrow a_{67} + \ldots + a_{98} - 32a_{99} < 0$

$z < 0$

$x + y + z < 0$, ponieważ jest sumą trzech ujemnych ~~składników~~ składników

co jest prawdą

c.k.d.