Matematyczna Liga Zadaniowa V LO

klasa pierwsza

Zadanie 8. Wykazać, że dla dowolnych i różnych od zera liczb rzeczywistych x, y wyrażenie

$$W=3\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-8\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+10$$

przyjmuje wartości nieujemne.

Wpłynęły dwa rozwiązania tego zadania – oba w pełni poprawne.

Paweł Mitręga IG

Mamy dane wyrażenie

$$3\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-8\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+10$$ gdzie $x, y \neq 0$ i $x,y \in R$

Możemy to zapisać jako

$$3\frac{x^2}{y^2}+3\frac{y^2}{x^2}-8\frac{x}{y}-8\frac{y}{x}+10$$

$$\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-4\frac{x}{y}-4\frac{y}{x}\right)+\left(2\frac{x^2}{y^2}-4\frac{x}{y}\right)+\left(2\frac{y^2}{x^2}-4\frac{x}{y}\right)+10$$

Zauważamy, że

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-4\frac{x}{y}-4\frac{y}{x}=\left(2-\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2-6$$

$$2\frac{x^2}{y^2}-4\frac{x}{y}=2\left(\frac{x}{y}-1\right)^2-2$$

$$2\frac{y^2}{x^2}-4\frac{y}{x}=2\left(\frac{y}{x}-1\right)^2-2$$

Więc ~~powyższe~~ dane wyrażenie możemy zapisać jako

$$\left(2-\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2-6+2\left(\frac{x}{y}-1\right)^2+2\left(\frac{y}{x}-1\right)^2-4+10=$$

$$=\left(2-\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2+2\left(\frac{x}{y}-1\right)^2+2\left(\frac{y}{x}-1\right)^2$$

$$\left(2-\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2+2\left(\frac{x}{y}-1\right)^2+2\left(\frac{y}{x}-1\right)^2\geq 0$$

Co jest zawsze prawdą, ponieważ jest to suma nieujemnych kwadratów liczb rzeczywistych, a jak wiemy kwadrat liczby rzeczywistej jest zawsze nieujemny.

c.k.d.

Adam Szewuda kl Ic

Oznaczmy przez a liczbę $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2$.

$$W=3\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-8\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+10$$

$$=3\left(\frac{x^2}{y^2}+2+\frac{y^2}{x^2}-2\right)-8\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2+2\right)+10$$

$$=3\left(\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2-2\right)-8(a+2)+10$$

$$=3\left(\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2+2\right)^2-2\right)-8(a+2)+10$$

$$=3\left((a+2)^2-2\right)-8(a+2)+10$$

$$=3\left(a^2+4a+4-2\right)-8(a+2)+10$$

$$=3a^2+12a+12-6-8a-16+10$$

$$=3a^2+4a$$

Ponieważ $x,y\neq 0$, to $\frac{x}{y}\neq 0$

Jeżeli $\frac{x}{y}>0$:

$$\left(\frac{x}{y}-1\right)^2\geqslant 0 \iff \left(\frac{x}{y}\right)^2-2\left(\frac{x}{y}\right)+1\geqslant 0$$

$$\iff \frac{x}{y}-2+\frac{1}{\frac{x}{y}}\geqslant 0 \iff \frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\geqslant 0$$

$$\iff a\geqslant 0 \iff 3a^2+4a\geqslant 0 \iff W\geqslant 0$$

Jeżeli $\frac{x}{y}<0$:

$\frac{y}{x}<0$ $\quad \frac{y^2}{x^2}>0$ $\quad \frac{x^2}{y^2}>0$

$$-8\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)>0$$

$$3\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)>0$$

W jest sumą trzech liczb dodatnich, więc jest dodatnie