# Matematyczna Liga Zadaniowa V LO

klasa pierwsza

---

**Zadanie 9.** Dana jest tablica o wymiarach $2017 \times 2018$. Rozstrzygnąć, czy w każdą komórkę tej tablicy można wpisać dodatnią liczbę całkowitą tak, aby sumy liczb w każdym wierszu oraz sumy liczb w każdej kolumnie były liczbami pierwszymi.

---

Wpłynęło sześć rozwiązań tego zadania – pięć w pełni poprawnych. Należy pamiętać, że zapis

$$x \equiv 0 \pmod{2017}$$

nie oznacza, że liczba $x$ jest liczbą pierwszą mimo, że liczba 2017 jest liczbą pierwszą.

Paweł Żurowski zad 9
kl. I B

$a_1, a_2, \dots, a_{2018} \in N_+$
$b_1, b_2, \dots, b_{2018} \in N_+$

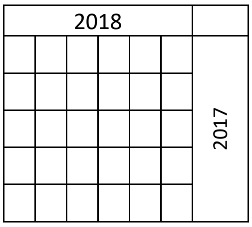
Najmniejsza suma jaką można uzyskać w danym wierszu jest 2017, a w danej kolumnie 2018 (2017 jedynek i 2018 jedynek). Sumy te muszą być nieparzyste, gdyż każda liczba pierwsza większa od 2 jest nieparzysta. Liczbę nieparzystą zapisuję jako $2x+1$.

Załóżmy, że można tak rozłożyć liczby, aby sumy liczb w każdym wierszu oraz sumy liczb w każdej kolumnie były liczbami pierwszymi. Niech suma liczb w pierwszej kolumnie wynosi $2a_1+1$, w drugiej kolumnie $2a_2+1$, itd., w ostatniej kolumnie $2a_{2018}+1$.
Suma tych sum będzie wówczas wynosiła $2a_1+1+2a_2+1+\dots+2a_{2018}+1 = 2(a_1+a_2+a_3+\dots+a_{2018}+1009)$
Zatem liczba ta jest podzielna przez 2.

Niech suma liczb w pierwszym wierszu wynosi $2b_1+1$, w kolejnym $2b_2+1$, itd., a w ostatnim $2b_{2017}+1$. Suma tych sum wynosi $2b_1+1+2b_2+1+\dots+2b_{2017}+1 =$
$= 2(b_1+b_2+b_3+\dots+b_{2017})+2017 = \cancel{2(b_1+b_2+b_3+\dots+b_{2017})} + 2\cdot(b_1+b_2+b_3+\dots+b_{2017}+1008)+1$.
Liczba ta nie jest podzielna przez 2.

Stąd wynika, że suma wszystkich liczb w tabeli ~~jest~~ jest parzysta, oraz nieparzysta. Jest to sprzeczność. Zatem liczb w tabeli nie można rozłożyć w danym sposób

Paweł Mitręga IB



Schemat

Zauważmy ,że żeby suma liczb w wierszu by była liczbą pierwszą to musi być także liczbą nieparzystą (gdyż ta suma jest zawsze większa od 2). Żeby ta suma była liczbą nieparzystą to ilość liczb nieparzystych w każdym wierszu musi być nieparzysta. Zaważmy także , że wierszy jest 2017 (liczba nieparzysta) , więc suma liczb pierwszych ze wszystkich wierszy także będzie liczbą nieparzysta. Możemy więc tą sumę zapisać jako :

$$S=2n+1 \quad i \quad n \in \mathbb{N}$$

Teraz zauważmy co musi być spełnione , suma liczb z kolumny była nieparzysta. Także ,jak w przypadku wierszy widzimy , że ilość liczb nieparzystych w kolumnie musi być nieparzysta. Lecz liczba kolumn jest równa 2018 (liczba parzysta) , więc suma wszystkich liczb nieparzystych jest parzysta i możemy ją zapisać jako :

$$S=2m \quad i \quad m \in \mathbb{N}$$

Suma wszystkich liczb nieparzystych w wierszach , musi być równa sumie wszystkich licz nieparzystych w kolumnach. Otrzymujemy więc :

$$2m=2n+1 \qquad m, n \in \mathbb{N}$$

Uzyskujemy sprzeczność , z której wynika ,że nie ma takich liczb , które po wpisaniu do tablicy spełniały by warunek zadania , ponieważ co najmniej jedna z sum jest liczbą parzystą i zawsze większą od 2.

C.K.D

Adam Szewuda kl. I c

Oznaczmy przez $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_{2018}$ sumy liczb w kolejnych wierszach, a przez $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_{2017}$ sumy liczb w kolejnych kolumnach.

Niech

$$W = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_{2018} \qquad K = k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_{2017}$$

Ponieważ $W$ i $K$ są sumami wszystkich liczb w tablicy, to $W = K$

Każda liczba w tablicy wynosi conajmniej 1, więc

$$w_1, w_2, w_3, \ldots, w_{2018} \geqslant 2017 \qquad k_1, k_2, k_3, \ldots, k_{2017} \geqslant 2018$$

Załóżmy, że wszystkie z $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_{2018}$ i $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_{2017}$ są liczbami pierwszymi. Jedyną parzystą liczbą pierwszą jest 2 oraz każde z $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_{2018}$ i $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_{2017}$ jest większe od 2, więc każde z nich jest nieparzyste.

$$W = \left[(w_1 - 1) + (w_2 - 1) + (w_3 - 1) + \ldots + (w_{2018} - 1)\right] + 2018$$

$$K = \underbrace{\left[(k_1 - 1) + (k_2 - 1) + (k_3 - 1) + \ldots + (k_{2017} - 1)\right]}_{\text{liczby parzyste}} + 2017$$

$W$ jest sumą liczb parzystych, więc $2 \mid W$

$K$ jest sumą liczb parzystych i liczby nieparzystej, więc $2 \nmid K$

$W \neq K$ oraz $W = K$, co jest sprzeczne, więc tablicy nie da się uzupełnić, by $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_{2018}$ oraz $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_{2017}$ były liczbami pierwszymi.