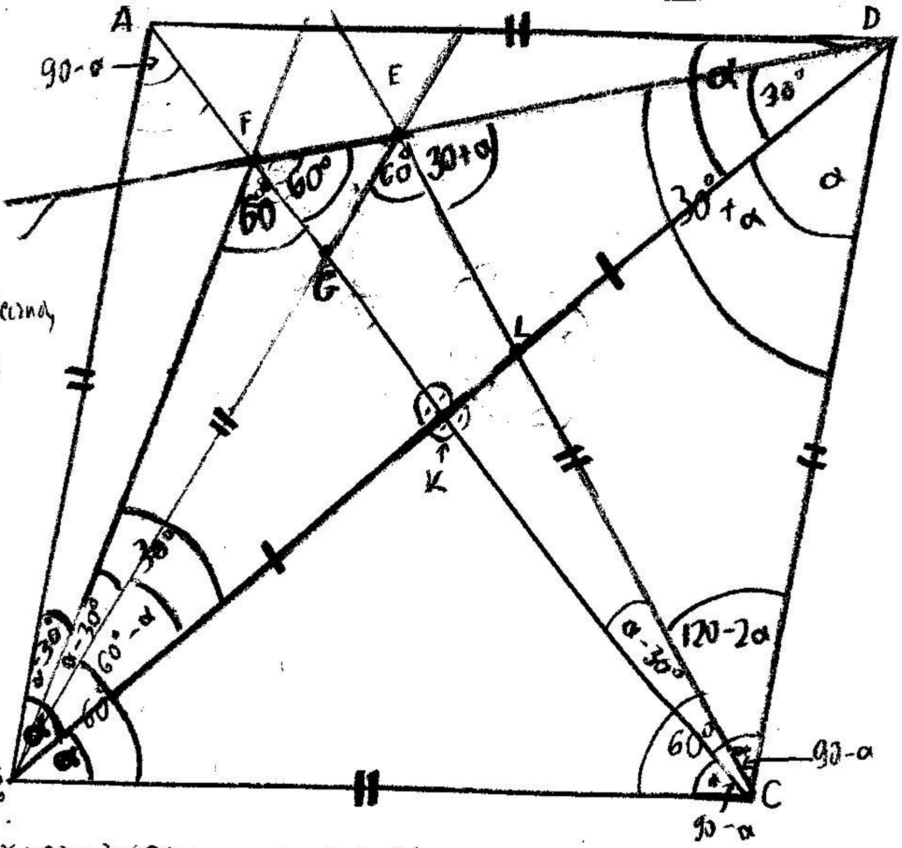
Matematyczna Liga Zadaniowa V LO

klasa pierwsza

Zadanie 10. Wewnątrz rombu $ABCD$ istnieje taki punkt E, że trójkąt BCE jest równoboczny. Dwusieczna kąta ABE przecina przekątną AC rombu $ABCD$ w punkcie F. Wykazać, że punkty: D, E, F są współliniowe.

Wpłynęły tylko dwa rozwiązania tego zadania – oba w pełni poprawne.

Zadanie 10
Paweł Żurowski 1B



Niech punkt G oznacza punkt przecięcia odcinków BE i AC, punkt K - punkt przecięcia przekątnych, a punkt L - punkt przecięcia odcinków CE i BD. Ponadto niech $\sphericalangle ABC = 2\alpha$. Odcinek BD jest dwusieczną tego kąta, więc $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD = \alpha$. Przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym. $\sphericalangle BKC = \sphericalangle CKD = \sphericalangle AKD = \sphericalangle AKB = 90^\circ$. Zatem $\sphericalangle BCK = \sphericalangle DCK = 90^\circ - \alpha$. Z warunków zadania $\sphericalangle EBC = \sphericalangle BEC = \sphericalangle BCE = 60^\circ$.

Na początek zacznę od kątów o wierzchołku kąta B. $\sphericalangle ABE = 2\alpha - 60^\circ$. BF jest dwusieczną tego kąta, więc $\sphericalangle ABF = \sphericalangle FBG = \alpha - 30^\circ$.
Ponadto, $\sphericalangle EBD = \sphericalangle CBE - \sphericalangle CBD = 60^\circ - \alpha$; $\sphericalangle FBD = \sphericalangle FBE + \sphericalangle EBD = 30^\circ$. Od razu zauważam, że trójkąty FBK i DFK są podobne z cechy przystawania bkb, co wynika z własności rombu. Zatem $\sphericalangle KDF = 30^\circ$

Teraz zauważam, że $|CE| = |CD|$, gdyż bok trójkąta jest równy bokowi rombu z warunków zadania, a to oznacza, że trójkąt ECD jest równoramienny. $\sphericalangle ECD = 180^\circ - 2\alpha - 60^\circ = 120^\circ - 2\alpha$. Zatem $\sphericalangle CED = \sphericalangle CDE = 30^\circ + \alpha$ Ale $\sphericalangle BDC + \sphericalangle EDB = \sphericalangle EDC$

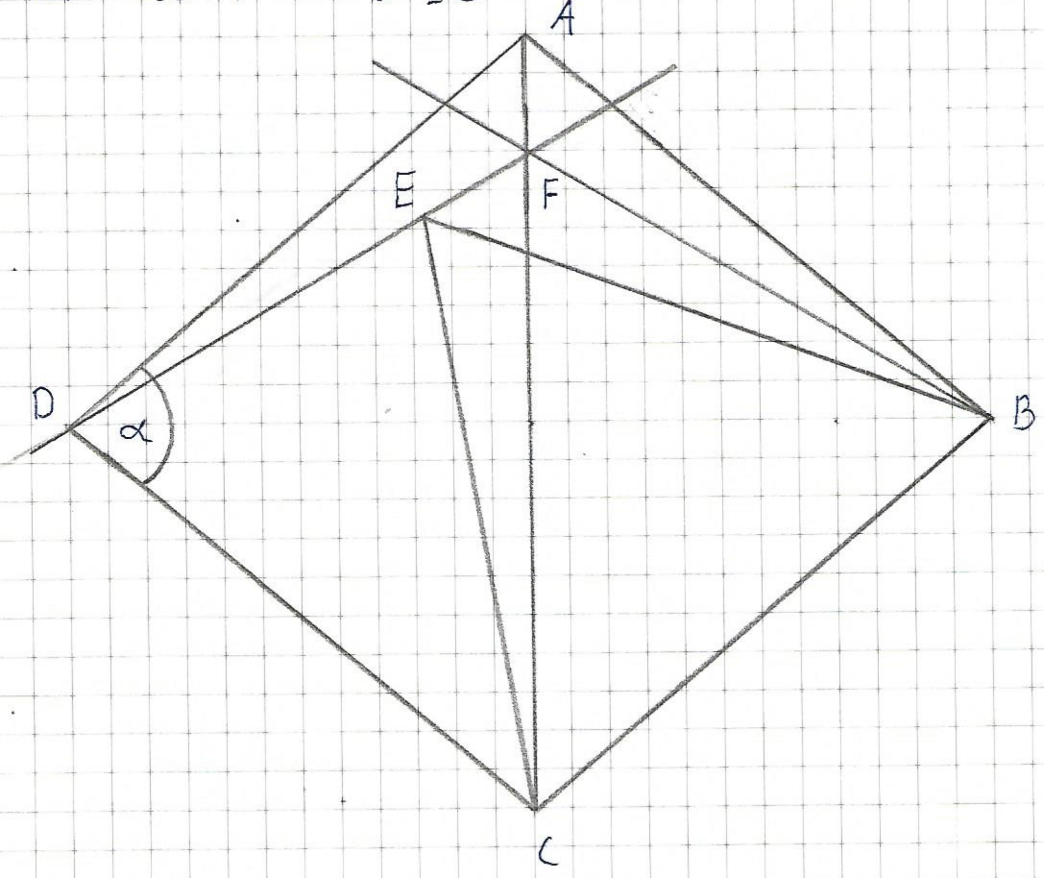
$$\alpha + \sphericalangle EDB = \alpha + 30^\circ$$
$$\sphericalangle EDB = 30^\circ$$

$$30^\circ = \sphericalangle EDB = \sphericalangle FDB = \sphericalangle FDK = 30^\circ$$

$\sphericalangle EDB = \sphericalangle FDB$ punkty D, K, B leżą na jednej prostej.

Skoro wierzchołek kąta jest ten sam, a jedno z ramion pozostaje bez zmian, to znaczy, że punkty F i E leżą na jednej półprostej ~~prostej~~. Także punkt D leży na tej półprostej. To oznacza, że punkty F, E, D są współliniowe.

Adam Szewuda kl. Ic



Niech $\sphericalangle ADC = \alpha$

$\sphericalangle BAD = 180^\circ - \alpha$

Ponieważ Δ_{BEC} jest równoboczny, $|EB| = |BC| = |AB| = |EC| = |CD|$

Trójkąty BEF i BFA mają wspólny bok BF, $|EB| = |AB|$ oraz $\sphericalangle EBF = \sphericalangle FBA$,

więc trójkąty te są przystające, co znaczy że $\sphericalangle FAB = \sphericalangle BEF$

$\sphericalangle BCD = 180^\circ - \alpha$

$\sphericalangle ECD = 180^\circ - \alpha - 60^\circ = 120^\circ - \alpha$

$|EC| = |CD|$, więc Δ_{ECD} jest równoramienny, czyli $\sphericalangle CED = \sphericalangle EDC$

$\sphericalangle CED = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle ECD) = \frac{1}{2}(180^\circ - (120^\circ - \alpha)) = 30^\circ + \frac{1}{2}\alpha$

$\sphericalangle BEF = \sphericalangle FAB = \frac{1}{2}\sphericalangle BAD = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$

$\sphericalangle DEF = \sphericalangle CED + \sphericalangle CEB + \sphericalangle BEF = (30^\circ + \frac{1}{2}\alpha) + 60^\circ + (90^\circ - \frac{1}{2}\alpha) = 180^\circ$,

czyli punkty D, E, F są współliniowe, co kończy dowód.