Zadanie 11. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y takich, że $xy \geqslant 0$ zachodzi równość

$$\left|\frac{x+y}{2}+\sqrt{xy}\right|+\left|\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}\right|=|x|+|y|.$$

Wpłynęły tylko dwa rozwiązania tego zadania. Jedno poprawne z uwagą, że należało wprowadzić dodatkowe założenie $xy \geqslant 0$. Rozwiązano je przy tym właśnie założeniu. W drugim podano tylko uwagę, że równość nie jest spełniona dla wszystkich liczb (podając przykład, kiedy nie jest ono określone) i stąd nie da się go rozwiązać. Ponieważ faktycznie w treści zadania zabrakło tego dodatkowego założenia, postanowiliśmy, że punkty zostaną rozdzielone po równo – każdy dostanie 6 pkt.

Rozwiązanie

Wprowadźmy oznaczenia

$$L=\left|\frac{x+y}{2}+\sqrt{xy}\right|+\left|\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}\right| \quad \text{oraz} \quad P=|x|+|y|.$$

Zauważmy, że jeśli $xy\geqslant 0$, to $|xy|=xy$. Ponieważ zarówno $L\geqslant 0$ i $P\geqslant 0$, więc równość $L=P$ jest równoważna równości $L^2=P^2$ i właśnie tę drugą wykażemy. Obliczamy

$$L^2=\left(\left|\frac{x+y}{2}+\sqrt{xy}\right|+\left|\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}\right|\right)^2=$$

$$=\frac{x^2+2xy+y^2}{4}+(x+y)\sqrt{xy}+xy+\frac{x^2+2xy+y^2}{4}-(x+y)\sqrt{xy}+xy+2\left|\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-2xy\right|=$$

$$=\frac{x^2+2xy+y^2}{2}+2xy+2\left|\frac{x^2+2xy+y^2}{4}-xy\right|=\frac{x^2+2xy+y^2}{2}+2xy+2\left|\frac{x^2+2xy+y^2-4xy}{4}\right|=$$

$$=\frac{x^2+6xy+y^2}{2}+2\left|\frac{(x-y)^2}{4}\right|=\frac{x^2+6xy+y^2+x^2-2xy+y^2}{2}=x^2+2xy+y^2=|x|^2+2|xy|+|y|^2=$$

$$=(|x|+|y|)^2=P^2,$$

co kończy dowód, że $L^2=P^2$, a zatem i kończy rozwiązanie zadania.