Matematyczna Liga Zadaniowa V LO

klasa pierwsza

Zadanie 12. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których liczba

$$a_n = \left(1 + n + n^2 + n^3 + \cdots + n^{n-1} + n^n\right)^2 - n^n$$

jest liczbą pierwszą.

Wpłynęło tylko jedno rozwiązanie – w przedłużonym terminie. Nadesłała je Julia Radzio – uczennica pierwszej klasy I Liceum Ogólnokształcącego im. Mikołaja Kopernika w Bielsku-Białej. I ona zgarnia całą pulę 12 pkt. Poniżej dwa rozwiązania tego zadania – pierwsze firmowe i drugie Julii.

Jeżeli $n = 1$, to $a_1 = 3$ i jest to liczba pierwsza. Załóżmy teraz, że $n > 1$. Zauważmy, że dla $n > 1$ prawdziwa jest równość

$$(n-1)(1+n+n^2+n^3+\dots+n^n) = n^{n+1}-1,$$

której prawdziwość można sprawdzić przez wymnożenie nawiasów po lewj stronie. Z równości tej otrzymujemy

$$a_n = \frac{\left(n^{n+1}-1\right)^2}{n-1} - n^n = \frac{n^{2(n+1)}-2n^{n+1}+1-n^{n+2}+2n^{n+1}-n^n}{(n-1)^2} = \frac{n^{2n+2}-n^{n+2}-n^n+1}{(n-1)^2} =$$

$$= \frac{(n^{n+2}-1)(n^n-1)}{(n-1)^2} = \frac{n^{n+2}-1}{n-1}\cdot\frac{n^n-1}{n-1} = (1+n+n^2+\dots+n^{n+1})\cdot(1+n+n^2+\dots+n^{n-1}),$$

a to dla $n > 1$ jest iloczyn dwóch liczb większych od 1, więc jest to liczba złożona.

$$a_n = (1+n+n^2+n^3+\ldots+n^{n-1}+n^n)^2 - n^n$$

$n \in C^+$ (z treści zadania)

$$(1+n+n^2+\ldots+n^n)^2 - n^n = \left[(1+n+n^2+\ldots+n^n)+n^{\frac{1}{2}n}\right]\cdot\left[(1+n+n^2+\ldots+n^n)-n^{\frac{1}{2}n}\right]$$

Aby powyższy iloczyn był liczbą pierwszą mniejszy ze składników musi przyjmować wartość 1, a większy musi być liczbą pierwszą

Ponieważ $n \in (0, +\infty)$, to $(1+n+n^2+\ldots+n^n)-n^{\frac{1}{2}n} < (1+n+n^2+\ldots+n^n)+n^{\frac{1}{2}n}$

więc $(1+n+n^2+\ldots+n^n)-n^{\frac{1}{2}n} = 1$

$$1+n+n^2+\ldots+n^n = 1+n^{\frac{1}{2}n}$$

$$\underbrace{n+n^2+\ldots+n^n}_{\text{liczba całkowita (z treści)}} = n^{\frac{1}{2}n}$$

Aby $n^{\frac{n}{2}}$ było całkowite n musi być liczbą parzystą lub być równe 1 lub być kwadratem liczby całkowitej

1^0 n jest liczbą parzystą

$$(1+n+n^2+\ldots+n^n)-n^{\frac{1}{2}n} = 1$$

$$1+n+n^2+\ldots+n^{\frac{n}{2}-1}+n^{\frac{n}{2}}+n^{\frac{n}{2}+1}+\ldots+n^n-n^{\frac{n}{2}} = 1$$

$$1+n+n^2+\ldots+n^{\frac{n}{2}-1}+n^{\frac{n}{2}+1}+\ldots+n^n = 1$$

$$n+n^2+\ldots+n^{\frac{n}{2}-1}+n^{\frac{n}{2}+1}+\ldots+n^n = 0$$

ponieważ $n \neq 0$ powyższa równość jest sprzeczna

2^0 $n = a^2$

$a \in C^+$

$a \neq 1$ ($n=1$ – patrz punkt 3)

$$(1+n+n^2+\ldots+n^n)-n^{\frac{1}{2}n} = 1$$

$$(1+a^2+a^4+a^6+\ldots+a^{2a^2})-a^{a^2} = 1$$

$$1+a^2+a^4+\ldots+(a^{a^2})^2-a^{a^2} = 1$$

$$\underbrace{\underbrace{a^2+a^4+\ldots+a^{a^2}}_{\text{liczba całkowita (z założenia)}}(\underbrace{a^{a^2}-1}_{\text{większe od 1 – z założenia całkowite}})}_{\text{iloczyn jest liczbą całkowitą}} = 0$$

Powyższe wyrażenie jest sprzeczne, ponieważ jest sumą liczb całkowitych większych od 0 i $n \neq 0$ - z treści zadania

3° $n = 1$

$a_n = (1 + n + n^2 + \ldots + n^n)^2 - n^n$

$a_n = (1 + 1)^2 - 1$

$a_n = 4 - 1$

$a_n = 3$ → liczba pierwsza

$\Downarrow$

$\underline{\underline{n = 1}}$

Julia Radzio klasa 1F

I LO w Bielsku-Białej