Matematyczna Liga Zadaniowa V LO

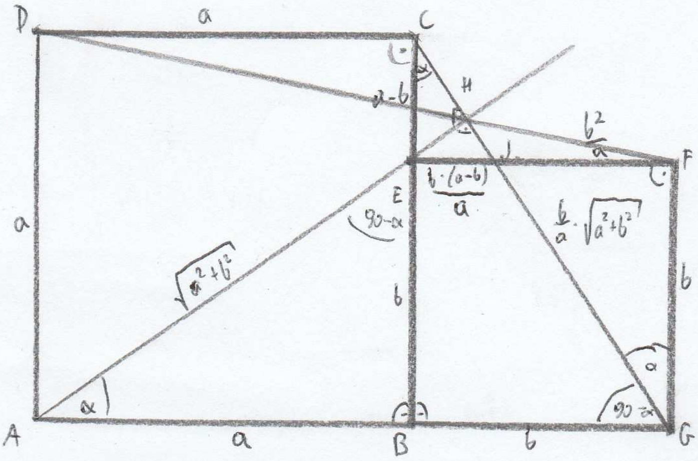
klasa pierwsza

Zadanie 15. Dany jest kwadrat $ABCD$ i punkt E ($B \neq E \neq C$) leżący na jego boku BC. Na zewnątrz kwadratu $ABCD$ zbudowano kwadrat $BEFG$. Wykazać, że proste AE, CG i DF przecinają się w jednym punkcie.

Wpłynęły cztery rozwiązania tego zadania. Jedno po terminie, więc nie może być uwzględnione. W jednym, poza rachunkami na kątach, brak jest jakiegokolwiek rozumowania – trzeba prowadzić go za autora. Jest to niezgodne z zasadami ligi, więc nie może być to rozwiązanie uznane za w pełni poprawne. W kolejnym nadesłanym rozwiązaniu przyjęto jako założenie warunek, który jest w istocie tezą zadania. To rozwiązanie też nie może być uznane. Jedyne w pełni poprawne rozwiązanie zostałe nadesłane przrez Pawła Żurowskiego i to on przejmuje całą pulę 12 pkt. za to zadanie.

Paweł Żywulski 1B

Zadanie 15



Niech długość większego kwadratu wynosi a, a mniejszego – b. Rysuję podane kwadraty, dorysowuję proste AE oraz CG. Niech ich punkt przecięcia nazywa się H, a punkt przecięcia odcinków CG i EF – J.

Na początek spójrzmy na trójkąty $\triangle ABE$ i $\triangle BGC$.

$|AB|=|BC|=a$, $\sphericalangle ABE=\sphericalangle CBG=90^\circ$, $|BE|=|BG|=b$

Z cechy przystawania bok-kąt-bok te trójkąty są przystające. Stąd jeżeli ~~kąt~~ kąt $\sphericalangle BAE$ wynosi α, to zarówno $\sphericalangle BEA$ jak i $\sphericalangle BGC$ wynosi $90-\alpha$.

Oczywiście z twierdzenia Pitagorasa $|AE|=|GC|=\sqrt{a^2+b^2}$

Następnie, trójkąt JGF jest podobny do trójkąta ABE, a więc

$$\frac{|JF|}{|FG|}=\frac{|BE|}{|AB|}=\frac{b}{a} \qquad \frac{|JF|}{b}=\frac{b}{a} \qquad |JF|=\frac{b^2}{a}$$

Ponadto: $|JF|+|EJ|=|EF|=b \qquad \frac{b^2}{a}+|EJ|=b \qquad |EJ|=b-\frac{b^2}{a}=\frac{ab}{a}-\frac{b^2}{a}=\frac{b\cdot(a-b)}{a}$

Mogę również wyliczyć długość odcinka $|GJ|$

$$\frac{|AB|}{|AE|}=\frac{|GF|}{|GJ|} \qquad \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b}{|GJ|} \qquad |GJ|=\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2+b^2}.$$

Wiedząc to znam również długość odcinka CJ. $|CJ|=|CG|-|JG|$, przy czym z wzasadnionego wcześniej przystawania $|GC|=\sqrt{a^2+b^2}$ $|CJ|=\sqrt{a^2+b^2}-\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2+b^2}=\left(1-\frac{b}{a}\right)\cdot\sqrt{a^2+b^2}=\left(\frac{a-b}{a}\right)\cdot\sqrt{a^2+b^2}$.

Teraz popatrzmy na trójkąt AGH. Suma kątów trójkąta wynosi 180°, a więc $\sphericalangle AHG=90^\circ$.

To oznacza, że proste AE i CG są prostopadłe. Ponadto z własności kątów odpowiadających $\sphericalangle HEJ=\alpha$, $\sphericalangle HJE=90^\circ-\alpha=\sphericalangle CEH$. Trójkąty $\triangle CHE$, $\triangle EHJ$, $\triangle CEJ$ są wszystkie podobne do trójkąta ABE, gdyż mają te same kąty.

A więc: $\frac{|CH|}{|CE|}=\frac{|AB|}{|AE|}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \frac{|CH|}{a-b}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad |CH|=\frac{a\cdot(a-b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$

W ten sam sposób: $\frac{|HJ|}{|EJ|}=\frac{|EB|}{|AE|}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad |HJ|=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{b\cdot(a-b)}{a}=\frac{b^2\cdot(a-b)}{a\sqrt{a^2+b^2}}$.

Na koniec spójrzmy na trójkąty $\triangle DCH$ i $\triangle JFH$.

Zauważmy, że $\frac{|DC|}{|CH|}=\frac{a}{\frac{a\cdot(a-b)}{\sqrt{a^2+b^2}}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a-b} \qquad \frac{|JF|}{|JH|}=\frac{\frac{\cancel{b^2}}{a}}{\frac{\cancel{b^2}\cdot(a-b)}{a\sqrt{a^2+b^2}}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a-b}=\frac{|DC|}{|CH|}$

Ponadto kąty $\sphericalangle DCJ$ i $\sphericalangle CJF$ są równe, gdyż są to kąty naprzemianległe, a $DC \parallel EF$.

Z drugiej cechy podobieństwa trójkątów trójkąty DCH i JHF są podobne (boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich boków drugiego trójkąta). Stąd wniosek, że punkt H leży na odcinku DF.

A zatem proste DF, CG, AE przecinają się w jednym miejscu oznaczonym literą H.