

Matematyczna Liga Zadaniowa V LO

klasy drugie – trzecie

Zadanie 2. Liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami równania $ax^2 + bx + c = 0$, a liczby x_3 i x_4 – pierwiastkami równania $ax^2 + 2bx + 3c = 0$. Wykazać, że jeśli $|x_1 - x_2| \geq 10$, to $|x_3 - x_4| > 17$.

Wpłynęły dwa rozwiązania tego zadania. Każde było w pełni poprawne.

ZADANIE 17-18-2-3-02.

Weronika Ormaniec 3b

Założenia:

$$x_1, x_2 - \text{pierwiatki równania } ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_3, x_4 - \text{pierwiatki równania } ax^2 + 2bx + 3c = 0$$

$$|x_1 - x_2| \geq 10$$

Teza:

$$|x_3 - x_4| > 17$$

Dowód:

Na początku należy zauważyć, że, aby równania miały po dwa rozwiązania (w wypadku pojedynczych rozwiązań: $|x_1 - x_2| = 0$ oraz $|x_3 - x_4| = 0$), muszą być spełnione warunki: $a \neq 0$, $b^2 - 4ac > 0$ oraz $4b^2 - 12ac > 0$. W rozwiązaniu mogą więc dzielić przez a .

Przekształć założenie:

$$|x_1 - x_2| \geq 10$$

Obie strony są dodatnie, więc mogę podnieść daną nierówność do kwadratu:

$$|x_1 - x_2| \geq 10$$

$$(x_1 - x_2)^2 \geq 100$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \geq 100$$

Korzystając ze wzorów Viète'a dla równania $ax^2 + bx + c = 0$:

$$\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a} \geq 100$$

$$4\frac{b^2}{a^2} - 12\frac{c}{a} \geq 3\frac{b^2}{a^2} - 12\frac{c}{a} \geq 300 > 289$$

$$\left(-\frac{2b}{a}\right)^2 - 4\frac{3c}{a} > 289$$

Korzystając ze wzorów Viète'a dla równania $ax^2 + 2bx + 3c = 0$:

$$(x_3 + x_4)^2 - 4x_3x_4 > 289$$

$$(x_3 - x_4)^2 > 289$$

$$|x_3 - x_4| > 17$$

Co należało wykazać.

Jakub Młynarski
klasa 2B

Zadanie 2

Korzystając ze wzorów Viète'a:

$$\frac{-b}{a} = x_1 + x_2 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = (x_1 + x_2)^2$$

$$\frac{c}{a} = x_1 x_2 \Rightarrow \frac{4ac}{a^2} = 4x_1 x_2$$

$$\frac{b^2 - 4ac}{a^2} = (x_1 - x_2)^2$$

ad.1 (Wiemy także, iż $\Delta \geq 0$

ze względu na 2 pierwiastki
rationalne x_1 i x_2)

$$\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{a^2}} \geq 10$$

Policzmy $|x_3 - x_4|$

$$\frac{-2b}{a} = x_3 + x_4 \Rightarrow \frac{4b^2}{a^2} = (x_3 + x_4)^2$$

$$\frac{3c}{a} = x_3 x_4 \Rightarrow \frac{12ac}{a^2} = 4x_3 x_4$$

$$\frac{4b^2 - 12ac}{a^2} = (x_3 - x_4)^2$$

$$|x_3 - x_4| = \sqrt{\frac{4b^2 - 12ac}{a^2}} = \sqrt{3} \sqrt{\frac{4b^2 - 4ac}{a^2}} =$$

$$= \sqrt{3} \sqrt{\frac{4b^2 - 4ac}{a^2}} > \sqrt{3} |x_1 - x_2| \geq 10\sqrt{3}$$

$$10\sqrt{3} > 17$$

$$\frac{4 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} > 0$$

