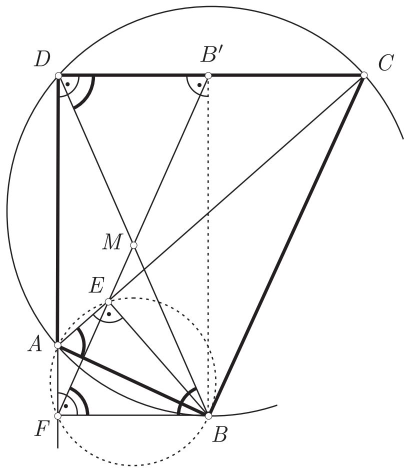
Zadanie 3. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $\sphericalangle ADC = 90^\circ$. Punkty E i F są rzutami prostokątnymi punktu B na proste odpowiednio AC i AD, przy czym punkt E leży na odcinku AC, a A – między punktami D i F. Wykazać, że jeśli prosta EF przechodzi przez środek odcinka BD, to na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

Nie wpłynęło żadne rozwiązanie tego zadania, w związku z tym nie zostały za nie przyznane punkty.

Rozwiązanie

Niech B' będzie rzutem prostokątnym punktu B na prostą CD. Wtedy czworokąt $FBB'D$ jest prostokątem, którego przekątne przecinają się w punkcie M będącym jednocześnie środkiem jego przekątnej BD. Stąd prosta EF zawiera się w przekątnej FB' powstałego prostokąta. A ponieważ środkiem przekątnej BD jest punkt M, więc trójkąt FBM jest równoramienny, w którym



$$\sphericalangle BFE = \sphericalangle BFM = \sphericalangle FBM,$$

skąd dostajemy

$$\sphericalangle BFE = \sphericalangle FBM = \sphericalangle FBD = \sphericalangle BDB' = \sphericalangle BDC.$$

Punkty E i F są rzutami prostokątnymi punktu B na proste odpowiednio AC i AD, więc na czworokącie $AFBE$ można opisać okrąg i w konsekwencji

$$\sphericalangle BFE = \sphericalangle BAE = \sphericalangle BAC.$$

Zauważmy teraz, że

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BFE = \sphericalangle BDC$$

oraz punkty A i D leżą po jednej stronie prostej BC, więc na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.