Matematyczna Liga Zadaniowa V LO
klasy drugie – trzecie

Zadanie 4. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka funkcja $f\colon \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$, która dla każdej liczby całkowitej x spełnia równość

$$f(f(x)) = x + 1.$$

Wpłynąły cztery rozwiązania tego zadania. Jedno całkowicie błędne. Podano, że taka funkcja istnieje i wskazano jej wzór: $f(x) = x + \frac{1}{2}$. Jednak dla liczb całkowitych x wartości tej funkcji nie są liczbami całkowitymi, więc nie jest to dobra funkcja.

Drugie rozwiązanie jest błędne, ponieważ podane stwierdzenie dotyczy tylko podzbioru liczb całkowitych (określonego przez autora rozwiązania). Brak natomiast dowodu, że tak będzie dla wszystkich liczb całkowitych.

Kolejne rozwiązanie jest poprawne, ale nie może zostać ocenione, ponieważ autorami jego są dwaj uczniowie — Krzysztof Boryczka i Szymon Drzazga z klasy 2a – co jest to niezgodne z regulaminem. Rozwiązanie to jest załączone poniżej.

I jeszcze jedna ciekawostka — poprawne rozwiązanie napłynęło do mnie również z USA. Jest ono całkowicie inne od rozwiązania Krzysztofa i Szymona. Autor tego rozwiązania pochodzi z Bielska-Białej (absolwent IV LO), ale od kilkudziesięciu lat pracuje zawodowo w USA. Mogę tylko zdradzić, że jest to mój pierwszy finalista Olimpiady Matematycznej i zawodowo pracuje jako informatyk, choć pierwotnie ukończył studia matematyczne (UW) i właśnie z matematyki obronił (już w USA) doktorat. Jego kolegami z klasy byli Pan Dyrektor Mirosław Frączek oraz Pan Krzysztof Krawet.

Całe rozumowanie będzie prowadzone w oparciu o założenie, że istnieją takie funkcje spełniające warunki zadania.

Zacznę od pokazania, że funkcja ta jest surjekcją. Załóżmy niewprost, że istnieje taka liczba całkowita a, która nie znajduje się w zbiorze wartości tej funkcji. Z drugiej strony podstawiając $x = a - 1$ otrzymujemy:

$$f(f(a-1)) = a$$

Zauważmy, że skoro $a \in \mathbb{Z}$ to na mocy założeń zadania także $a - 1 \in \mathbb{Z}$ oraz $f(a-1) \in \mathbb{Z}$. Zatem istnieje taka liczba całkowita, dla której wartość funkcji wynosi a, otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Niech teraz $f(x) = m$, gdzie $x \wedge m \in \mathbb{Z}$ Z warunku $f(f(x)) = x + 1$, naszego założenia i z faktu, że funkcja ta jest surjekcją otrzymujemy:

$$f(m) = x + 1$$
$$f(f(m)) = m + 1$$
$$f(x+1) = m + 1$$
$$f(x+1) = f(x) + 1 \quad (1)$$
$$f(x) = f(x+1) - 1 \quad (2)$$

Teraz pokażę indukcyjnie, że $f(k) = k + f(0)$ Dla $f(0)$ otrzymujemy $f(0) = 0 + f(0)$. Następnie indukcja dla liczb dodatnich, dla $k = 1$ na mocy (1) mamy $f(1) = 1 + f(0)$. Dla $k+1$ ponownie na mocy (1) i tezy indukcyjnej dostajemy $f(k+1) = f(k)+1 = k+1+f(0)$, co kończy indukcję. Analogicznie dla liczb ujemnych, z tym że korzystamy z (2).

Zatem otrzymaliśmy $f(k) = k + f(0)$, dla $k \in \mathbb{Z}$. Wstawiając teraz do rówanania danego w zadaniu otrzymujemy:

$$f(f(x)) = x + 1$$
$$f(f(x)) = f(x + f(0)) = x + 2f(0)$$
$$x + 2f(0) = x + 1$$
$$f(0) = \frac{1}{2}$$

Jako, że przeciwdziedzina funkcji to zbiór $\mathbb{Z}$, a $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ i $0 \in \mathbb{Z}$ (czyli należy do dziedziny) to otrzymujemy sprzeczność, która dowodzi, że nie istnieją funkcje spełniające warunki zadania.

Zadanie 17-18-2-3-04

(Załóżmy, że taka funkcja istnieje ... wtedy)

(1) Nie może istnieć takie x_0, że $f(x_0)=x_0$ ponieważ mielibyśmy:

$$x_0 = f(x_0) = f(f(x_0)) = x_0+1$$

(2) Niech $Z^- = \{x ; f(x) < x\}$ i $Z^+ = \{x ; f(x) > x\}$

Z (1) mamy $Z = Z^- \cup Z^+$.

Twierdzimy, że:

(2a) $f: Z^- \to Z^+$

(2b) $f: Z^+ \to Z^-$

Gdyby dla pewnego $x_0 \in Z^-$, $f(x_0) \in Z^-$ to $x_0 > f(x_0)$ i $f(f(x_0)) < f(x_0)$ czyli $x_0 > f(x_0) > f(f(x_0)) = x_0+1$ co dowodzi (2a)

Gdyby dla pewnego $x_0 \in Z^+$, $f(x_0) \in Z^+$ to $f(x_0) > x_0$ i $f(f(x_0)) > f(x_0)$ czyli $x_0+1 = f(f(x_0)) > f(x_0) > x_0$ co jest niemożliwe ponieważ nie ma liczby całkowitej pomiędzy x_0+1 i x_0. Mamy (2b).

(3) Z powyższych rozważań wynika, że

(3a) $f^2 : Z^- \to Z^-$

(3b) $f^2 : Z^+ \to Z^+$

(3c) Z^- i Z^+ są niepustymi zbiorami

Pokażemy, że (3a) oznacza, że jeśli $x_0 \in Z^-$ to $x_0+1 \in Z^-$.
W samej rzeczy $f^2(x_0) \in Z^-$ czyli

$$f(f(f(x_0))) < f(f(x_0))$$

ale $f(f(x_0)) = x_0+1$ czyli ostatnia nierówność

mówi, że $f(x_0+1) < x_0+1$ czyli $x_0+1 \in Z^-$

Podobnie pokazujemy, że (3b) oznacza, że jeśli $x_0 \in Z^+$ to $x_0+1 \in Z^+$.
Mamy bowiem $f^2(x_0) \in Z^+$ kiedy

$$f(f(f(x_0))) > f(f(x_0))$$

co po podstawieniu $f(f(x_0)) = x_0+1$ daje

$$f(x_0+1) > \cancel{x}_0+1$$

(4) Powyżej pokazaliśmy, że Z^- i Z^+ muszą mieć niepuste przecięcie co jest niemożliwością.