Matematyczna Liga Zadaniowa V LO

klasy drugie – trzecie

Zadanie 6. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 2x^2+\dfrac{1}{z^2}=y^2+2 \\[2mm] 2y^2+\dfrac{1}{x^2}=z^2+2 \\[2mm] 2z^2+\dfrac{1}{y^2}=x^2+2. \end{cases}$$

Wpłynęły cztery rozwiązania tego zadania — tylko jedno w pełni poprawne. W pozostałych zabrakło sprawdzenia (a nawet komentarza), że wyznaczone trójki spełniają dany układ równań. Pamiętać należy, że dodawanie równań stronami jest operacją dozwoloną, ale nie jest to przekształcenie równoważne. jeśli $a=b$ i $c=d$, to na pewno $a+c=b+d$. Jeśli natomiast $a+c=b+d$, to z tego nie wynika, że $a=b$ i $c=d$.

$$\begin{cases} 2x^2 + \frac{1}{z^2} = y^2 + 2 \\ 2y^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 + 2 \\ 2z^2 + \frac{1}{y^2} = x^2 + 2 \end{cases}$$

Zauważmy, że aby wyrażenia miały sens to $x, y, z \neq 0$.
Dodajmy równania stronami i przekształćmy równoważnie.

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = x^2 + y^2 + z^2 + 6$$

$$x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} + y^2 - 2 + \frac{1}{y^2} + z^2 - 2 + \frac{1}{z^2} = 0$$

$$(x - \frac{1}{x})^2 + (y - \frac{1}{y})^2 + (z - \frac{1}{z})^2 = 0$$

Jako, że kwadrat wyrażenia jest liczbą nieujemną to z tego, że suma kwadratów wynosi zero wynika że każdy ze składników jest równy 0. Zatem:

$$(x - \frac{1}{x})^2 = 0$$

$$x - \frac{1}{x} = 0 \quad (x \neq 0)$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x = 1 \lor x = -1$$

Analogicznie dla y i z. Bezpośrednio sprawdzamy, że trójki $(1, 1, 1)$, $(-1, 1, 1)$, $(-1, -1, 1)$, $(-1, -1, -1)$ oraz wszystkie ich permutacje są rozwiązaniami wyjściowego układu równań.