Zadanie 6. Ciąg (a_n) określony jest wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2+2}{a_{n-1}} \quad \text{dla } n \geqslant 2. \end{cases}$$

Wykazać, że wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są liczbami całkowitymi.

Rozwiązanie

Obliczając kilka początkowych wyrazów ciągu (a_n) możemy zauważyć, że:

$$a_3 = 3 = 4\cdot 1 - 1 = 4a_2 - a_1, \qquad a_4 = 11 = 4\cdot 3 - 1 = 4a_3 - a_2, \qquad a_5 = 41 = 4\cdot 11 - 3 = 4a_4 - a_3,$$
$$a_6 = 153 = 4\cdot 41 - 11 = 4a_5 - a_4, \qquad a_7 = 571 = 4\cdot 153 - 41 = 4a_6 - a_5 \ldots$$

Na podstawie tej obserwacji stawiamy hipotezę:

Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ zachodzi równość

(∗) $$a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}.$$

Wykażemy, że tak jest. W dowodzie wykorzystamy zasadę indukcji matematycznej.

Dla $n=3$ równość jest spełniona, bo $a_3 = 4a_2 - a_1$, co sprawdziliśmy powyżej. Załóżmy teraz, że równość (∗) zachodzi dla $a_3,\ a_4,\ \ldots,\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n$. Wykażemy, że równość (∗) zachodzi też dla liczby a_{n+1}, czyli $a_{n+1} = 4\cdot a_n - a_{n-1}$.

Równość (∗) możemy zapisać równoważnie

$$a_{n-2} = 4a_{n-1} - a_n.$$

Z określenia ciągu (a_n) mamy

$$a_n = \frac{a_{n-1}^2+2}{a_{n-2}} = \frac{a_{n-1}^2+2}{4a_{n-1}-a_n},$$

czyli

$$4a_{n-1}\cdot a_n - a_n^2 = a_{n-1}^2 + 2,$$

albo równoważnie

$$4a_{n-1}\cdot a_n - a_{n-1}^2 = a_n^2 + 2.$$

Zatem

$$\frac{a_n^2+2}{a_{n-1}} = 4a_n - a_{n-1},$$

skąd

$$a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}.$$

Tym samym dowód hipotezy został zakończony.

Ponieważ liczby a_1, a_2, a_3 są liczbami całkowitymi, więc również wszystki liczby a_n są liczbami całkowitymi. Równocześnie wykazaliśmy nieco więcej: wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są liczbami nieparzystymi.

Uwaga. Przedstawione rozwiązanie oparte jest na pomyśle Laury Meissner (2a), która jedyna nadesłała poprawne rozwiązanie, choć jej zapis był nieco mniej przejrzysty. Dlatego pozwoliliśmy sobie na jego redakcję.