Matematyczna Liga Zadaniowa V LO

klasy drugie – trzecie

Zadanie 9. Wykazać, że jeśli a i b są liczbami nieujemnymi, to prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{a^2+b^2}+2\sqrt{ab}\geqslant a+b+\sqrt{2ab}\,.$$

Nadesłano trzy rozwiązania tego zadania. Dwa w pełni poprawne. W jednym powołano się na implikację:

$$\text{jeśli } \sqrt{2}\,\sqrt{a^2+b^2}\geqslant a+b, \text{ to } \sqrt{a^2+b^2}\geqslant a+b,$$

co nie jest prawdą. Można to sprawdzić np. dla liczb $a=b=\dfrac{3}{5}\sqrt{5}\,.$

Nierówność będę przekształcał równoważnie:

$$\sqrt{a^2+b^2}+2\sqrt{ab} \geqslant a+b+\sqrt{2ab}$$

$$\sqrt{a^2+b^2} \geqslant a+b+\sqrt{2ab}-2\sqrt{ab}$$

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} \geqslant \frac{a+b}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}ab}-\sqrt{ab}$$

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} \geqslant \frac{a+b}{2}+\underbrace{\sqrt{ab}}_{2.}\underbrace{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}-1\right)}_{1.}$$

Zauważmy, że wyrażenie 1. jest ujemne oraz wyrażenie 2. jest nieujemne, więc ich iloczyn jest niedodatni. Skąd:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}-1\right)$$

Ponadto z nierówności między średnią kwadratową, a arytmetyczną wiemy, że:

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} \geqslant \frac{a+b}{2}$$

Zatem:

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} \geqslant \frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}-1\right)$$

A ponieważ przekształcałem równoważnie, nierówność z zadania także jest prawdziwa. Quod erat demonstrandum.

WERONIKA ORMANIEC
KLASA 3B

ZADANIE 17-18-2-3-09

Z: $a,b \geq 0 \quad a,b \in \mathbb{R}$

T: $\sqrt{a^2+b^2} + 2\sqrt{ab} \geq a + b + \sqrt{2ab}$

D.

Przypadek 1) $a \vee b = 0$
Bez straty ogólności, niech $a = 0$, wtedy

$$L = \sqrt{b^2} = b \quad (b \geq 0)$$

$$P = b$$

czyli prawdą jest, że $L \geq P$

Gdy zarówno $a = b = 0$, wtedy $L = 0$, $P = 0$ czyli $L \geq P$

Przypadek 2) $a, b \neq 0$

Dla wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

Więc przekształcając ją obustronnie.

$$2\frac{a}{b} + 2\frac{b}{a} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 \quad / \cdot 2$$

$$4\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 2\left(\frac{a}{b} + 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}} + \frac{b}{a}\right) \quad / \sqrt[2]{}$$ bo $L > 0$, $P > 0$ $a, b > 0$

$$2\sqrt{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}} \geq \sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right) \quad / \cdot 2$$

$$4\sqrt{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}} \geq 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{a}{b}} + 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{b}{a}} \quad / + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 4$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 4\sqrt{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}} + 4 \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 + 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}} + 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{a}{b}} + 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}} + 2\right)^2 \geq \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{2}\right)^2 \quad / \sqrt[2]{}$$ bo $L > 0$, $P > 0$ $a, b > 0$

$$\sqrt{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}} + 2 \geq \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{2} \quad / \cdot \sqrt{ab} > 0$$

$$\sqrt{a^2+b^2} + 2\sqrt{ab} \geq \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} + \sqrt{2ab}$$

$$\sqrt{a^2+b^2} + 2\sqrt{ab} \geq a + b + \sqrt{2ab}$$

cnd.