Matematyczna Liga Zadaniowa V LO

klasy drugie – trzecie

Zadanie 10. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba

$$\frac{n^{44}+n^{33}+n^{22}+n^{11}+1}{n^4+n^3+n^2+n+1}$$

jest liczbą naturalną.

Nadesłano tylko dwa rozwiązania tego zadania. Oba w pełni poprawne.

Zauważmy, że:

$$\frac{n^{44}+n^{33}+n^{22}+n^{11}+1}{n^4+n^3+n^2+n+1}=A$$

$A=n^{40}-n^{39}+n^{35}-n^{34}+n^{30}-n^{28}+n^{25}-n^{23}+n^{20}-n^{17}+n^{15}-n^{12}+n^{10}-n^6+n^5-n+1$

Co łatwo sprawdzić, korzystając z faktu, iż:

$$\frac{x}{y}=A \iff A*y=x$$

Podstawmy wyrażenia z naszego pierwszego równania i policzmy $A*y$:

$$(n^{40}-n^{39}+n^{35}-n^{34}+n^{30}-n^{28}+n^{25}-n^{23}+n^{20}-n^{17}+n^{15}-n^{12}+n^{10}-n^6+n^5-n+1)*$$

$$*(n^4+n^3+n^2+n+1)=$$

$$\begin{gathered}
=n^{44}+n^{43}+n^{42}+n^{41}+n^{40}+\\
-n^{43}-n^{42}-n^{41}-n^{40}-n^{39}+\\
+n^{39}+n^{38}+n^{37}+n^{36}+n^{35}+\\
-n^{38}-n^{37}-n^{36}-n^{35}-n^{34}+\\
+n^{34}+n^{33}+n^{32}+n^{31}+n^{30}+\\
-n^{32}-n^{31}-n^{30}-n^{29}-n^{28}+\\
+n^{29}+n^{28}+n^{27}+n^{26}+n^{25}+\\
-n^{27}-n^{26}-n^{25}-n^{24}-n^{23}+\\
+n^{24}+n^{23}+n^{22}+n^{21}+n^{20}+\\
-n^{21}-n^{20}-n^{19}-n^{18}-n^{17}+\\
+n^{19}+n^{18}+n^{17}+n^{16}+n^{15}+\\
-n^{16}-n^{15}-n^{14}-n^{13}-n^{12}+\\
+n^{14}+n^{13}+n^{12}+n^{11}+n^{10}+\\
-n^{10}-n^9-n^8-n^7-n^6+\\
+n^9+n^8+n^7+n^6+n^5+\\
-n^5-n^4-n^3-n^2-n+\\
+n^4+n^3+n^2+n+1=
\end{gathered}$$

$$= n^{44} + n^{33} + n^{22} + n^{11} + 1$$

Co potwierdza naszą początkową obserwację.

Zobaczmy, że wynik ilorazu podanego w zadaniu $A > 0$, bo $n \in \mathbb{N}$ oraz suma nieujemnych wyrażeń i dodatniego wyrażenia jest dodatnia:

$$A = \overbrace{n^{40} - n^{39}}^{\geqslant 0} + \overbrace{n^{35} - n^{34}}^{\geqslant 0} + \overbrace{n^{30} - n^{28}}^{\geqslant 0} + \overbrace{n^{25} - n^{23}}^{\geqslant 0} + \overbrace{n^{20} - n^{17}}^{\geqslant 0} + \overbrace{n^{15} - n^{12}}^{\geqslant 0} +$$

$$+ \overbrace{n^{10} - n^{6}}^{\geqslant 0} + \overbrace{n^{5} - n}^{\geqslant 0} + \overbrace{1}^{>0}$$

Ponadto zapisując A w następujący sposób:

$$A = n^{40} + (-n^{39}) + n^{35} + (-n^{34}) + n^{30} + (-n^{28}) + n^{25} + (-n^{23}) + n^{20} + (-n^{17}) + n^{15} +$$

$$+ (-n^{12}) + n^{10} + (-n^{6}) + n^{5} + (-n) + 1$$

Powiemy, że A jest sumą liczb całkowitych, gdyż (pamiętając, że $n \in \mathbb{N}$) liczba naturalna podniesiona do całkowitej nieujemnej potęgi pozostaje liczbą naturalną, więc też całkowitą, a wynik iloczynu -1 i liczby naturalnej należy do zbioru liczb całkowitych. Co oznacza że $A \in \mathbb{Z}$, bo suma liczb całkowitych jest także liczbą całkowitą.

Końcowo otrzymujemy:

$$A > 0 \wedge A \in \mathbb{Z} \Longrightarrow A \in \mathbb{N}$$

Quod erat demonstrandum.

ZADANIE 17-18-2-3-11.
WERONIKA ORMANIEC 3B

Z: $n \in \mathbb{Z}_+$

T: $\frac{n^{44}+n^{33}+n^{22}+n^{11}+1}{n^4+n^3+n^2+n+1} \in \mathbb{Z}_+$

D: Teza jest równoważna, że stwierdzeniem (1°) $n^{44}+n^{33}+n^{22}+n^{11}+1 \equiv 0 \pmod{n^4+n^3+n^2+n+1}$.
~~[illegible]~~ Dlatego od teraz (1°) będzie moją tezą.

Dla ułatwienia zapisu, niech $S = n^4+n^3+n^2+n+1$

Na początek zauważam, że:

$$n^{10}-1 = (n-1)(n^9+n^8+n^7+n^6+n^5+n^4+n^3+n^2+n+1) = (n-1)(n^5+1)(n^4+n^3+n^2+n+1) \equiv 0 \pmod{S}$$

$$n^{10}-1 \equiv 0 \pmod{S}$$

$$n^{10} \equiv 1 \pmod{S}$$

$$n^{11} \equiv n \pmod{S}$$

Z tej kongruencji otrzymuję poniższy układ:

$$\begin{cases} n^{44} \equiv n^4 \pmod{S} \\ n^{33} \equiv n^3 \pmod{S} \\ n^{22} \equiv n^2 \pmod{S} \\ n^{11} \equiv n \pmod{S} \\ 1 \equiv 1 \pmod{S} \end{cases} \Bigg/ +$$

Po dodaniu stronami:

$$n^{44}+n^{33}+n^{22}+n^{11}+1 \equiv n^4+n^3+n^2+n+1 = S \equiv 0 \pmod{S}$$

$$n^{44}+n^{33}+n^{22}+n^{11}+1 \equiv 0 \pmod{n^4+n^3+n^2+n+1}$$

$$\Downarrow$$

$$k(n^4+n^3+n^2+n+1) = n^{44}+n^{33}+n^{22}+n^{11}+1$$ dla $k \in \mathbb{Z}_+$ (bo ~~[illegible]~~ obie sumy są dodatnie całkowite)

$$k = \frac{n^{44}+n^{33}+n^{22}+n^{11}+1}{n^4+n^3+n^2+n+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{n^{44}+n^{33}+n^{22}+n^{11}+1}{n^4+n^3+n^2+n+1} \in \mathbb{Z}_+$$

cnd.