Zadanie 12. Wykazać, że liczba

$$\sin\frac{\pi}{18}\cdot\sin\frac{3\pi}{18}\cdot\sin\frac{5\pi}{18}\cdot\sin\frac{7\pi}{18}\cdot\sin\frac{9\pi}{18}$$

jest wymierna.

Nadesłano tylko dwa rozwiązania tego zadania. Oba w pełni poprawne.

17-18-2-3-12

WERONIKA ORMANIEC 3B

Z: $\sin\frac{\pi}{18}\cdot\sin\frac{3\pi}{18}\cdot\sin\frac{5\pi}{18}\cdot\sin\frac{7\pi}{18}\cdot\sin\frac{9\pi}{18}\in\mathbb{Q}$

D.

Najpierw zauważam, że:

$$\sin\frac{\pi}{18}\cdot\sin\frac{5\pi}{18}\cdot\sin\frac{7\pi}{18}=\sin\frac{\pi}{18}\cdot\left(\sin\left(\frac{6\pi}{18}-\frac{\pi}{18}\right)\cdot\sin\left(\frac{6\pi}{18}+\frac{\pi}{18}\right)\right)=\sin\frac{\pi}{18}\cdot\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{18}-\sin\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cdot\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{18}+\sin\frac{\pi}{18}\cdot\cos\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{18}\left(\sin^2\frac{\pi}{3}\cdot\cos^2\frac{\pi}{18}-\sin^2\frac{\pi}{18}\cos^2\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{18}\left(\frac{3}{4}\cos^2\frac{\pi}{18}-\frac{1}{4}\sin^2\frac{\pi}{18}\right)$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{18}}{4}\left(3\cos^2\frac{\pi}{18}-\sin^2\frac{\pi}{18}\right)=\frac{\sin\frac{\pi}{18}}{4}\left(3\left(\cos^2\frac{\pi}{18}-1\right)-\sin^2\frac{\pi}{18}+3\right)=\frac{\sin\frac{\pi}{18}}{4}\left(-4\sin^2\frac{\pi}{18}+3\right)$$

$$=\cancel{\sin\pi}\,\frac{1}{4}\left(-4\sin^3\frac{\pi}{18}+3\sin\frac{\pi}{18}\right)=\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$

Więc:

$$\sin\frac{\pi}{18}\cdot\sin\frac{3\pi}{18}\cdot\sin\frac{5\pi}{18}\cdot\sin\frac{7\pi}{18}\cdot\sin\frac{9\pi}{18}=\frac{1}{4}\sin^2\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{16}\in\mathbb{Q}$$

cnd

Będę przekształcał równoważnie.

$$\sin\frac{\pi}{18}\cdot\sin\frac{3\pi}{18}\cdot\sin\frac{5\pi}{18}\cdot\sin\frac{7\pi}{18}\cdot\sin\frac{9\pi}{18}$$

$$\sin 10^\circ\cdot\sin 30^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ\cdot\sin 90^\circ$$

$$\sin 10^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ\cdot\sin 90^\circ\cdot\sin 30^\circ$$

$$\sin 10^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ\cdot 1\cdot\frac{1}{2}$$

$$\sin 10^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ\cdot\frac{1}{2}$$

Używając wzoru redukcyjnego: $\sin\alpha = \cos(90^\circ-\alpha)$

$$\cos(90^\circ-10^\circ)\cdot\cos(90^\circ-50^\circ)\cdot\cos(90^\circ-70^\circ)\cdot\frac{1}{2}$$

$$\cos 80^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 20^\circ\cdot\frac{1}{2}$$

Korzystając ze wzoru na sinus podwojonego kąta: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$$\frac{\sin 160^\circ}{2\sin 80^\circ}\cdot\frac{\sin 80^\circ}{2\sin 40^\circ}\cdot\frac{\sin 40^\circ}{2\sin 20^\circ}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ}\cdot\frac{1}{16}$$

Wykorzystując kolejny wzór redukcyjny tj. $\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$

$$\frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}\cdot\frac{1}{16}$$

$$1\cdot\frac{1}{16}$$

$$\frac{1}{16}\in\mathbb{Q}$$

Przekształcając równoważnie otrzymałem liczbę wymierną, więc liczba z zadania też jest wymierna. Quod erat demonstrandum.