Matematyczna Liga Zadaniowa V LO

klasy drugie – trzecie

Zadanie 16. W zbiorze liczb rzeczywistych rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x^2+x+y=y^3 \\ y^2+y+x=x^3. \end{cases}$$

Nadesłano cztery rozwiązania tego zadania. Trzy w pełni poprawne. Jedno rozwiązanie nadesłano z niepełnym skanem, więc nie może zostać uznane.

LAURA MEISSNER

$$\begin{cases} x^2+x+y=y^3 \\ y^2+y+x=x^3 \end{cases}$$

Po odjęciu stronami dostaniemy $x^2-y^2=y^3-x^3$

$$\Updownarrow$$

$$(x-y)(y+x)=(x-y)(-x^2-xy-y^2)$$

$$\Updownarrow$$

$$(x-y)(x+y+x^2+xy+y^2)=0 \Rightarrow x-y=0 \text{ lub } x+y+x^2+y^2+xy=0$$

1° $x-y=0 \Leftrightarrow x=y$

Wtedy układ równań wygląda tak:

$$\begin{cases} x^2+x+x=x^3 \\ x^2+x+x=x^3 \end{cases} \Rightarrow x^2+2x=x^3 \Leftrightarrow x(x^2-x-2)=0$$

$$\Downarrow$$

$x=0$ lub $x=-1$ lub $x=2$

Bezpośrednio sprawdzamy, że te pary ~~sęp~~ spełniają układ:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

2° $x+y+x^2+y^2+xy=0$ Wiemy, że $x^2+x+y=y^3$, więc podstawiemy to do tego równania

$$\Downarrow$$

$$y^3+y^2+xy=0 \Leftrightarrow y(y^2+y+x)=0 \Rightarrow y=0 \text{ lub } y^2+y+x=0$$

$1^\circ)$ $y=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2+x=0 \\ x=x^3 \end{cases} \Rightarrow x^2+x^3=0 \Leftrightarrow x^2(x+1)=0$

$$\Downarrow$$

$x=0$ lub $x=-1$

~~Po~~ Sprawdzamy, że pary $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$ spełniają układ równań.

$2^\circ)$ $y^2+y+x=0$ (Wiemy, że $y^2+y+x=x^3$)

$$\Downarrow$$

$$x^3=0 \Leftrightarrow x=0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} y=y^3 \\ y^2+y=0 \end{cases} \Rightarrow y^2+y^3=0 \Leftrightarrow y^2(y+1) \Rightarrow y=0 \text{ lub } y=-1$$

Sprawdzamy, że pary $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$ spełniają układ.

Czyli wszystkie rozwiązania (x,y) to $(0,0), (-1,-1), (2,2), (0,-1), (-1,0)$

Zadanie 17182316

Założenia: $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x^2+x+y=y^3 \\ y^2+y+x=x^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x+1)=y(y+1)(y-1) & (\star) \\ y(y+1)=x(x+1)(x-1) & (\star\star) \end{cases}$$

Podstawiam $(\star\star)$ do $(\star)$.

$$x(x+1)=x(x+1)(x-1)(y-1)$$

$$x(x+1)[(x-1)(y-1)-1]=0$$

$$x(x+1)(xy-x-y)=0$$

$$\mathbf{1^o}\ x=0 \quad \vee \quad \mathbf{2^o}\ x=-1 \quad \vee \quad \mathbf{3^o}\ xy-x-y=0$$

Przypadek 1^o

$$\begin{cases} 0=y(y+1)(y-1) \\ 0=y(y+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0 \vee y=-1 \vee y=1 \\ y=0 \vee y=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$$

Wykonuję sprawdzenie. Obie dwójki rozwiązań spełniają układ równań.
Przypadek 2^o
Analogicznie:

$$\begin{cases} y=0 \vee y=-1 \vee y=1 \\ y=0 \vee y=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$$

Wykonuję sprawdzenie. Obie dwójki rozwiązań spełniają układ równań.
Przypadek 3^o

$$xy-x-y=0$$

$$x=y(x-1)$$

Założę, że $x \neq 0$. Przypadek, gdy $x=0$ jest rozpatrzony w $\mathbf{1^o}$. Jeśli $x \neq 0$ to $y \neq 0$ i $x-1 \neq 0$.

$$y=\frac{x}{x-1}$$

Podstawiam do $(\star\star)$.

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)\left(\frac{x}{x-1}+1\right)=x(x+1)(x-1)$$

$$\left(\frac{x(2x-1)}{(x-1)^2}\right)=x(x+1)(x-1)$$

Ponieważ $x \neq 0$ i $x-1 \neq 0$ mnożę obustronnie przez $\left(\frac{(x-1)^2}{x}\right)$

$$2x-1=(x^2-1)(x^2-2x+1)$$

$$x^4-2x^3=0$$

$$x^3(x-2)$$

$$x=0 \quad \vee \quad x=2$$

$x=0$ jest sprzeczne z założeniem $x \neq 0$.
Podstawiam $x=2$ do $(\star\star)$

$$y^2+y-6=0$$

$$\Delta = 25 > 0$$

$$y=\frac{-1+5}{2} \quad \vee \quad y=\frac{-1-5}{2}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$$

Wykonuję sprawdzenie. Pierwsza para spełnia równanie, ale dla drugiej jest on sprzeczny.
Zatem rozwiązaniami tego układu są:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

Rozpatrzmy dwa przypadki:

1°

$$x = y$$

Wtedy równania przyjmują postać:

$$x^2 + x + x = x^3 \Leftrightarrow x(x-2)(x+1) = 0$$

Skąd otrzymujemy pierwsze możliwe pary rozwiązań: (-1,-1), (0,0), (2,2).

2°

$$x \neq y$$

Odejmując równania stronami mamy:

$$x^2 - y^2 = y^3 - x^3$$

$$\Updownarrow$$

$$(x-y)(x+y) = (y-x)(x^2 + xy + y^2) \wedge x \neq y$$

$$\Updownarrow$$

$$-(x+y) = x^2 + xy + y^2$$

Z powyższego równania interesują nas tylko punkty wspólne z równaniami z układu:

$$x + y + x^2 + xy + y^2 = x^2 + x + y - y^3 \vee x + y + x^2 + xy + y^2 = y^2 + y + x - x^3$$

$$\Updownarrow$$

$$y^3 + y^2 + yx = 0 \vee x^3 + x^2 + xy = 0$$

Ponieważ szukamy przecięć z osiami reprezentujących wspólne punkty, to niech $x = 0$ w pierwszym równaniu i $y = 0$ w drugim:

$$y^3 + y^2 = 0 \vee x^3 + x^2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$y^2(y+1) = 0 \vee x^2(x+1) = 0$$

Tutaj dostajemy kolejne i ostatnie pary rozwiązań do sprawdzenia: (0,-1), (-1,0). Nie znalazła się tu para (0,0), która nie spełnia warunków rozpatrzanego przypadku.

Po sprawdzeniu otrzymujemy końcowe pary rozwiązań:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} (-1)^2 + (-1) + (-1) = (-1)^3 \\ (-1)^2 + (-1) + (-1) = (-1)^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0^2 + 0 + 0 = 0^3 \\ 0^2 + 0 + 0 = 0^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2^2 + 2 + 2 = 2^3 \\ 2^2 + 2 + 2 = 2^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 0^2 + 0 + (-1) = (-1)^3 \\ (-1)^2 + (-1) + 0 = 0^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (-1)^2 + (-1) + 0 = 0^3 \\ 0^2 + 0 + (-1) = (-1)^3 \end{cases}$$