Matematyczna Liga Zadaniowa V LO

klasy drugie – trzecie

Zadanie 17. Ciąg (x_n) określony jest wzorem rekurencyjnym

$$x_0 = 49, \qquad x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} \ \text{ dla } \ n \geqslant 1.$$

Wykazać, że jeśli $n > 2\,035\,000$, to $x_n > 2018$.

Nadesłano dwa rozwiązania tego zadania. Oba w pełni poprawne.

17-18-2-3-17

WERONIKA ORMANIEC 3B

Z: $a_0 = 49 \qquad x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}, \ n \geq 1$

T: Dla $n > 2035000$, $x_n > 2018$

D:

Najpierw udowodnię, że wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie.

Zauważmy, że $x_0 > 0$ – baza indukcyjna.

Załóżmy, że $x_n > 0 \Rightarrow x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} > 0$. Czyli z indukcji wynika, że wszystkie wyrazy ciągu są dodatnie

$$\cancel{x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}}$$

$$\cancel{x_n^2 = x_{n-1}^2 + 2 + \frac{1}{x_{n-1}^2}}$$

Pokażę teraz indukcyjnie, że $x_n^2 > x_0^2 + n \cdot 2$

Baza indukcyjna:

$$x_1^2 = \left(49 + \frac{1}{49}\right)^2 = \left(\frac{2402}{49}\right)^2 > 117747 > 2401 + 2 = x_0^2 + 2$$

Z. indukcyjne: $x_{n-1}^2 > x_0^2 + (n-1) \cdot 2$

D_in:

$$x_n^2 = x_{n-1}^2 + 2 + \frac{1}{x_{n-1}^2} > x_{n-1}^2 + 2 > x_0^2 + n \cdot 2 \Rightarrow x_n^2 > x_0^2 + n \cdot 2$$

$$x_{2035000}^2 > (49)^2 + 2035000 \cdot 2 = 4072401 > 4072324$$

$\Downarrow$ ponieważ $x_{2035000} > 0$

$$x_{2035000} > 2018$$

Ponadto:

$$x_n - x_{n-1} = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} - x_{n-1} = \frac{1}{x_{n-1}} > 0 \Rightarrow x_n > x_{n-1}$$

więc ciąg jest rosnący.

Dlatego dla każdego $n > 2035000$, $x_n > \cancel{2018}\ x_{2035000} > 2018$

cnd.

Dowód rozpocznę od obserwacji, iż ciąg jest rosnący. Wynika to wprost z faktu, iż $x_0 = 49$ a x_n jest sumą poprzedniego elementu i jego odwrotnośći.

Zależność między elementami x_n a x_{n-1} z zadania wyrażona jest wzorem

$$x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}$$

Podnosząc obustronnie do kwadratu (obie strony są dodatnie)

$$x_n^2 = x_{n-1}^2 + 2 + \frac{1}{x_{n-1}^2}$$

Czyli równoważnie

$$x_n^2 - x_{n-1}^2 = 2 + \frac{1}{x_{n-1}^2}$$

Skąd wynika nierówność

$$x_n^2 - x_{n-1}^2 > 2$$

Podstawiając pod n po kolei liczby od 1 do N i dodając powstałe nierównośći stronami mamy

$$x_N^2 - x_{N-1}^2 + x_{N-1}^2 - x_{N-2}^2 + \ldots + x_2^2 - x_1^2 + x_1^2 - x_0^2 > 2 \cdot N$$

Po uproszczeniu

$$x_N^2 - x_0^2 > 2 \cdot N$$

Wykorzystajmy nieco inną formę powyższej nierówności

$$x_N > \sqrt{2 \cdot N + x_0^2}$$

W szczególności, gdy $N = 2035000$ i $x_0 = 49$

$$x_N > \sqrt{2 \cdot 2035000 + 49^2}$$

Po prostych rachunkach

$$x_N > 2018,019 > 2018$$

Przypomnijmy sobie, że ciąg jest rosnący, więc każdy kolejny element po N-tym elemencie także będzie wiekszy od 2018.

Podsumowując, gdy $N > 2035000$ i $x_0 = 49$ to

$$x_N > 2018$$

Q.E.D