Matematyczna Liga Zadaniowa V LO

klasa pierwsza

Zadanie 23. Wykazać, że jeśli a, b są przyprostokątnymi trójkąta prostokątnego, a r – promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt, to

$$r \leqslant \frac{1}{4}(2-\sqrt{2})(a+b).$$

Wpłynęły dwa rozwiązania tego zadania. Oba w pełni poprawne.

Adam Szewuda kl Ic

Oznaczmy przyprostokątne trójkąta przez x i $x+y$.

Długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równa ilorazowi jego pola i połowy obwodu, czyli

$$r = \frac{\frac{1}{2}x(x+y)}{\frac{1}{2}\left(x+x+y+\sqrt{x^2+(x+y)^2}\right)}$$

Przekształcając równoważnie:

$$r = \frac{(x^2+xy)\cdot\left(2x+y-\sqrt{x^2+(x+y)^2}\right)}{\left(2x+y+\sqrt{x^2+(x+y)^2}\right)\left(2x+y-\sqrt{x^2+(x+y)^2}\right)} = \frac{(x^2+xy)\left(2x+y-\sqrt{2x^2+2xy+y^2}\right)}{4x^2+4xy+y^2-2x^2-2xy-y^2}$$

$$= \frac{(x^2+xy)\left(2x+y-\sqrt{2}\sqrt{x^2+xy+\frac{1}{2}y^2}\right)}{2x^2+2xy} = \frac{1}{2}\left(2x+y-\sqrt{2}\sqrt{x^2+xy+\frac{1}{2}y^2}\right)$$

Ponieważ $\frac{1}{2}y^2 \geqslant \frac{1}{4}y^2$, to całe wyrażenie jest mniejsze bądź równe:

$$\frac{1}{2}\left(2x+y-\sqrt{2}\sqrt{x^2+xy+\frac{1}{4}y^2}\right) = \frac{1}{2}\left(2x+y-\sqrt{2}\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2x+y-\sqrt{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y\right) = \frac{1}{4}\left(2-\sqrt{2}\right)(2x+y)$$

Czyli:

$$r \leqslant \frac{1}{4}\left(2-\sqrt{2}\right)(x+x+y)$$

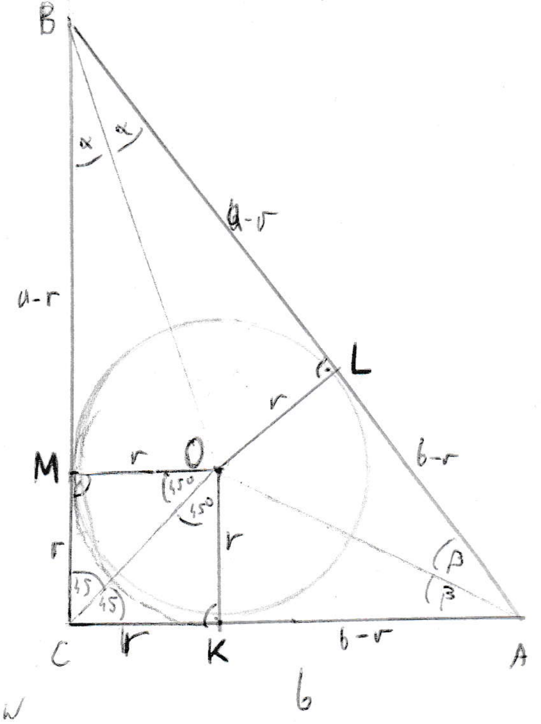
co kończy dowód.

Paweł Żurowski 1B

Zadanie 23

$a>0,\ b>0$

T: $r \le \frac{1}{4}(2-\sqrt{2})(a+b)$



Rysuję trójkąt o przyprostokątnych a, b. Przeciwprostokątna ma wówczas z tw. Pitagorasa długość $\sqrt{a^2+b^2}$.

Rysuję także okrąg wpisany w trójkąt i promienie prostopadłe do danych boków. Środek tego okręgu nazywam O, a miejsca styczności promieni z bokami o długościach a, b, $\sqrt{a^2+b^2}$ odpowiednio M, K, L. Środek okręgu wpisanego leży na

~~Środek okręgu leży na w miejscu przecięcia dwusiecznych~~

przecięciu dwusiecznych trójkąta.

W takim razie $\sphericalangle LBO = \sphericalangle MBO$. Ponadto, promień jest prostopadły do stycznej do okręgu, więc $\sphericalangle BMO = \sphericalangle BLO = 90^\circ$. Suma kątów w trójkącie wynosi 180°, stąd $\sphericalangle MOB = \sphericalangle LOB$. Trójkąty MOB i LOB mają takie same kąty i ten sam odcinek OB, zatem są przystające (cecha przystawania kbk)

$\Delta MOB \equiv \Delta LOB$

W ten sam sposób można też udowodnić, że $\Delta LOA \equiv \Delta LOK$ oraz $\Delta MOC \equiv \Delta CKO$.

W czworokącie $CMOK$ trzy kąty ($\sphericalangle CMO$, $\sphericalangle CKO$, $\sphericalangle MCK$) są równe 90°, więc także $\sphericalangle MOK = 90^\circ$. Zatem czworokąt $CMOK$ jest prostokątem. Ponadto prostokąt ten ~~musi mieć~~ ma wszystkie boki równe, bo $|MO| = |KO| = r$, a z definicji prostokąta $|MC| = |OK| = r$ oraz $|CK| = |MO| = r$.

$|BM| = |BC| - |MC| = a - r$. A ponieważ $\Delta MOB \equiv \Delta LOB$, to $|MB| = |BL| = a - r$.

Analogicznie $|KA| = |AL| = b - r$. Wtedy $|AB| = a - r + b - r$, ale bok ten ma długość $\sqrt{a^2+b^2}$, o czym pisałem wcześniej. Stąd równość:

$$a - r + b - r = \sqrt{a^2+b^2} \quad | + 2r - \sqrt{a^2+b^2}$$
$$a + b - \sqrt{a^2+b^2} = 2r \quad | + \sqrt{a^2+b^2} - 2r$$
$$a + b - 2r = \sqrt{a^2+b^2}$$

Wychodzę teraz od oczywistej nierówności:

$$(a-b)^2 \ge 0 \quad | \cdot 2$$

Każda liczba rzeczywista podniesiona do kwadratu jest liczbą nieujemną

$$2(a-b)^2 \ge 0 \quad | + 2ab$$
$$2a^2 + 2b^2 \ge 4ab \quad | + 2a^2 + 2b^2$$
$$4a^2 + 4b^2 \ge 2a^2 + 4ab + 2b^2$$
$$4(a^2+b^2) \ge 2\cancel{(a+b)}(a^2 + 2ab + b^2) \quad | \sqrt{\ }$$

Po obu stronach nierówności mam liczby rzeczywiste większe od 0, zatem mogę spierwiastkować.

$$2\sqrt{a^2+b^2} \ge \sqrt{2} \cdot (a+b)$$

W tym miejscu korzystam z podstawienia $\sqrt{a^2+b^2} = a + b - 2r$

$$2a + 2b - 4r \ge \sqrt{2}(a+b) \quad | + 4r - \sqrt{2}(a+b)$$
$$4r \le 2a + 2b - \sqrt{2}(a+b)$$
$$4r \le 2(a+b) - \sqrt{2}(a+b)$$
$$4r \le (2-\sqrt{2})(a+b) \quad | : 4$$
$$r \le \frac{2-\sqrt{2}}{4}(a+b)$$

c.n.d.