Matematyczna Liga Zadaniowa V LO

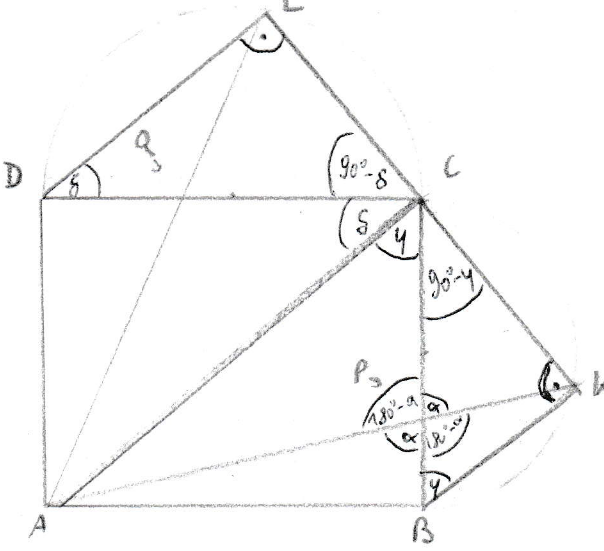
klasa pierwsza

Zadanie 24. Dany jest prostokąt $ABCD$. Na jego bokach BC i CD, na zewnątrz prostokąta, zbudowano półokręgi o średnicach BC i CD. Prosta p, przechodząca przez punkta A, przecina bok BC w punkcie P oraz półokrąg, zbudowany na tym boku, w punkcie K $(B \neq K \neq C)$ tak, że pola trójkątów ABP i CKP są równe. Prosta q, przechodząca przez punkt A, przecina bok CD w punkcie Q oraz półokrąg, zbudowny na tym boku, w punkcie L. $(C \neq L \neq D)$ tak, że pola trójkątów AQD i CLQ są równe. Wykazać, że punkty K, C, L leżą na jednej prostej.

Wpłynęło tylko jedno rozwiązanie tego zadania. Jest ono w pełni poprawne.

Paweł Żurowski 1B

Zadanie 24



Na początek dorysowuję odcinki LC, DC, CK, BK oraz AC.

Z warunków zadania $P_{\Delta ABP} = P_{\Delta CKP}$. Pole trójkąta można wyliczyć między innymi ze wzoru $P=\frac{1}{2}\cdot ab \sin y$

Niech $\sphericalangle APB = \alpha$. Wówczas $\sphericalangle CPK = \alpha$, gdyż są to kąty wierzchołkowe. Pole trójkąta ABP jest wtedy równe ~~$\frac{1}{2} |AP|$~~ $\frac{1}{2}\cdot|AP|\cdot|BP|\cdot\sin\alpha$, a pole trójkąta CPK $\frac{1}{2}\cdot|CP|\cdot|KP|\cdot\sin\alpha$. Porównuję te pola.

$$\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}\cdot|AP|\cdot|BP| = \frac{1}{2}|CP|\cdot|KP|\cdot\sin\alpha \quad |:\tfrac{1}{2}:\sin\alpha$$

$$|AP|\cdot|BP| = |CP|\cdot|KP| \quad |:|KP|:|BP|$$

$$\frac{|AP|}{|KP|} = \cancel{\frac{|BP|}{|KP|}}\ \frac{|CP|}{|BP|}$$

Teraz można zauważyć, że trójkąty APC i BKP mają równe stosunki długości dwóch par boków, ponadto kąty zawarte między tymi bokami są równe ($\sphericalangle APC = \sphericalangle BPK = 180° - \alpha$). W takim razie z cechy podobieństwa bok-kąt-bok trójkąty APC i BPK są podobne. $\Delta APC \sim \Delta BPK$.

Analogicznie można wykazać, że $\Delta DQL \sim \Delta AQC$.

Nazywam kąt PBK − y, a kąt LDQ − δ. Korzystając z podobieństwa trójkątów, ~~∢ARC~~ $\sphericalangle ACP = y$, a $\sphericalangle QCA = \delta$. Natomiast zarówno kąt DLC jak i kąt BKC są kątami prostymi, gdyż odcinki DC oraz CB są średnicami odpowiednich okręgów. Suma kątów w trójkącie wynosi 180°, więc $\sphericalangle DCL = 180° - \sphericalangle CDL - \sphericalangle DLC = 180° - \delta - 90° = 90° - \delta$, a także $\sphericalangle BCK = 180° - \sphericalangle BKC - \sphericalangle CBK = 180° - 90° - y = 90° - y$.

Na koniec kąt LCK jest równy sumie kątów LCD, DCA, ACB, BCK, więc:

$$\sphericalangle LCK = \sphericalangle LCD + \sphericalangle DCA + \sphericalangle ACB + \sphericalangle BCK = 90° - \delta + \delta + y + 90° - y = \underline{180°}.$$

Skoro kąt LCK jest równy 180°, to punkty L, C, K leżą na jednej prostej, a więc są współliniowe, co należało udowodnić.