Matematyczna Liga Zadaniowa V LO

klasy drugie – trzecie

Zadanie 19. Ciągi (a_n) i (b_n) określone są układem równań rekurencyjnych

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ b_1 = -1 \\ a_{n+1} = 4a_n + b_n \\ b_{n+1} = -a_n + 2b_n. \end{cases}$$

Wyznaczyć wzory ogólne ciągów (a_n) i (b_n).

Nadesłano dwa rozwiązania tego zadania. Oba w pełni poprawne.

Dodając stronami dwa ostatnie równania z układu mamy

$$a_{n+1} + b_{n+1} = 3 \cdot (a_n + b_n)$$

Łączac powyższe z faktem, że $a_1 + b_1 = 3$ dostajemy wzór ogólny na sumę n-tych elementów obu ciągów

$$a_n + b_n = 3^n$$

Wtedy trzecie równanie z zadania możemy przedstawić jako

$$a_{n+1} = 4 \cdot a_n + 3^n - a_n$$

$$\Updownarrow$$

$$a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 3^n$$

To oznacza, że kolejne elementy ciągu a_n dzielą się przez kolejne potęgi trójki, co możemy zapisać jako

$$a_n = 3^n * c_n$$

Wykorzystując dwa powyższe równania

$$3^{n+1} \cdot c_{n+1} = 3 \cdot 3^n \cdot c_n + 3^n$$

$$\Updownarrow$$

$$c_{n+1} = c_n + \frac{1}{3}$$

To daje nam wzór na c_n zależny tylko od n i c_1

$$c_n = c_1 + \frac{n-1}{3}$$

$$c_n = c_1 + \frac{n-1}{3} \wedge a_n = 3^n * c_n$$

$$\Downarrow$$

$$a_n = 3^n \cdot \left(c_1 + \frac{n-1}{3}\right)$$

Łatwo policzyć, że $c_1 = \frac{4}{3}$, podstawiając pod powyższe równanie dowolne n np. $n = 1$

$$4 = 3^1 \cdot \left(c_1 + \frac{1-1}{3}\right)$$

Znając c_1 otrzymujemy już wzór ogólny na a_n

$$a_n = 3^{n-1} \cdot (3+n)$$

Użyjmy wcześniejsze wzory

$$a_n = 3^{n-1} \cdot (3+n) \wedge a_n + b_n = 3^n$$
$$\Downarrow$$
$$b_n = 3^n - 3^{n-1} \cdot (3+n)$$
$$\Updownarrow$$
$$b_n = -3^{n-1} \cdot n$$

Reasumując

$$a_n = 3^{n-1} \cdot (3+n)$$
$$b_n = -3^{n-1} \cdot n$$

Q.E.D

Krzysztof Boryczka, kl. II A

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ b_1 = -1 \\ a_{n+1} = 4a_n + b_n \quad (*) \\ b_{n+1} = -a_n + 2b_n \end{cases}$$

Indukcyjnie pokażę:

$$a_n + b_n = 3^n$$

$n=1$: $4 + (-1) = 3^1$

Z: $a_n + b_n = 3^n$

T: $a_{n+1} + b_{n+1} = 3^{n+1}$

$$4a_n + b_n - a_n + 2b_n = 3^{n+1}$$

$$3(a_n + b_n) = 3^{n+1}$$

$\underline{a_n + b_n = 3^n} \rightarrow$ prawda

Przekształcam równanie:

(1) $b_n = 3^n - a_n$

$(*)$ $a_{n+1} = 4a_n + 3^n - a_n$

$(\circledast)$ $a_{n+1} = 3a_n + 3^n$

Indukcyjnie pokażę:

$$a_n = 3^{n-1}(n+3)$$

$n=1$: $a_1 = 4 = 3^0(1+3)$

Z: $a_n = 3^{n-1}(n+3)$

T: $a_{n+1} = 3^{n}(n+4)$

$(\circledast)$ $\cancel{a_{n+1}}$ $3a_n + 3^n = 3^{n}(n+4)$

$a_n = 3^{n-1}(n+4) - 3^{n-1} = 3^{n-1}(n+3) \rightarrow$ prawda

$$a_n = 3^{n-1}(n+3)$$

(1) $b_n = 3^n - a_n = 3^n - 3^{n-1}(n+3) = -3^{n-1} \cdot n$

$$a_n = 3^{n-1}(n+3)$$

$$b_n = -3^{n-1} \cdot n$$

Po bezpośrednim podstawieniu sprawdzamy, że spełniają warunki zadania.