Matematyczna Liga Zadaniowa V LO

klasy drugie – trzecie

Zadanie 20. Liczby x, y, z są liczbami z przedziału $(0;\pi)$ oraz $x+y+z<\pi$. Wykazać, że liczby te spełniają nierówność

$$\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} y+\operatorname{ctg} z \geqslant \operatorname{ctg}\frac{x+y}{2}+\operatorname{ctg}\frac{y+z}{2}+\operatorname{ctg}\frac{z+x}{2}.$$

Nadesłano poprawne rozwiązanie tego zadania. Autorka – Weronika Ormaniec (3b) – otrzymuje 12 punktów.

WERONIKA ORMANIEC 3B

17-18-2-3-20

Z: $x, y, z \in (0;\pi)$, $x+y+z<\pi$

T: $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z \geq \operatorname{ctg}\frac{x+y}{2} + \operatorname{ctg}\frac{y+z}{2} + \operatorname{ctg}\frac{z+x}{2}$

D:

LEMAT 1.

Z: Najpierw udowodnię, że dla każdego $\alpha, \beta \in (0,\pi)$ takiego, że $\alpha+\beta<\pi$ zachodzi:

T. $$\frac{1}{2}\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} \geq \frac{1+\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Wiadomo, że kwadrat l. rzeczywistej jest nieujemny:

$$(\sin\alpha - \sin\beta)^2 \geq 0$$

$$\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta \geq 0$$

$$\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta + \sin^2\beta - \sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta \geq -2\sin^2\sin^2\beta$$

$$\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta) + \sin^2\beta(1-\sin^2\alpha) \geq 2\sin\alpha\sin\beta - 2\sin^2\sin^2\beta$$

$$\sin^2\alpha\cos^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta + \sin^2\beta\cos^2\alpha \geq 2\sin\alpha\sin\beta \underbrace{+2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta - 2\sin^2\sin^2\beta}$$

$$(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)^2 \geq 2\sin\alpha\sin\beta(1 + \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$$

$$\sin^2(\alpha+\beta) \geq 2\sin\alpha\sin\beta(1+\cos(\alpha+\beta)) \quad / : 2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta) > 0$$

zgodnie z założeniami $\alpha, \alpha+\beta, \beta \in (0,\pi)$ czyli sinusy są dodatnie

$$\frac{1}{2}\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} \geq \frac{1+\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$ czyli teza lematu

Zauważmy, że pary x, y; y, z; z, x spełniają założenie lematu 1: $x, y, z \in (0,\pi)$ oraz $x+y \in (0,\pi)$, $y+z \in (0,\pi)$, $z+x \in (0,\pi)$ bo $x+y+z \in (0,\pi)$, a x, y, z dodatnie.

Dodając tezę lematu 1, dla każdej z tych par otrzymujemy:

(1) $$\frac{1}{2}\frac{\sin(x+y)}{\sin x\sin y} + \frac{1}{2}\frac{\sin(y+z)}{\sin y\sin z} + \frac{1}{2}\frac{\sin(z+x)}{\sin z\sin x} \geq \frac{1+\cos(x+y)}{\sin(x+y)} + \frac{1+\cos(y+z)}{\sin(y+z)} + \frac{1+\cos(z+x)}{\sin(z+x)}$$

Zgodnie ze wzorami z tablic matematycznych:

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} \quad \text{oraz} \quad \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \frac{1+\cos\gamma}{\sin\gamma}$$

można przekształcić (1) na:

$$\cancel{\tfrac{1}{2}(\operatorname{ctg}x + \operatorname{ctg}y) + \tfrac{1}{2}(\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma) + \tfrac{1}{2}(\operatorname{ctg}}$$

$$\frac{1}{2}(\operatorname{ctg}x + \operatorname{ctg}y) + \frac{1}{2}(\operatorname{ctg}y + \operatorname{ctg}z) + \frac{1}{2}(\operatorname{ctg}z + \operatorname{ctg}x) \geqslant \operatorname{ctg}\frac{x+y}{2} + \operatorname{ctg}\frac{y+z}{2} + \operatorname{ctg}\frac{z+x}{2}$$

$$\operatorname{ctg}x + \operatorname{ctg}y + \operatorname{ctg}z \geqslant \operatorname{ctg}\frac{x+y}{2} + \operatorname{ctg}\frac{y+z}{2} + \operatorname{ctg}\frac{z+x}{2}$$

cnd