Matematyczna Liga Zadaniowa V LO

klasy drugie – trzecie

Zadanie 24. Wyznaczyć wszystkie ciągi $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ dodatnich liczb całkowitych, dla których wszystkie liczby

$$\frac{x_1+x_2}{x_2+x_3}, \frac{x_2+x_3}{x_3+x_4}, \frac{x_3+x_4}{x_4+x_5}, \ldots, \frac{x_{n-1}+x_n}{x_n+x_1}, \frac{x_n+x_1}{x_1+x_2},$$

są liczbami całkowitymi.

Nadesłano tylko jedno rozwiązanie tego zadania. Jest ono w pełni poprawne.

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$\frac{x_1+x_2}{x_2+x_3}, \frac{x_2+x_3}{x_3+x_4}, \ldots, \frac{x_{n-1}+x_n}{x_n+x_1}, \frac{x_n+x_1}{x_1+x_2} \in \mathbb{Z}$$

$$\Downarrow$$

$$x_1+x_2 \geqslant x_2+x_3 \quad \wedge \quad x_2+x_3 \geqslant x_3+x_4 \quad \wedge \quad \ldots \quad \wedge \quad x_n+x_1 \geqslant x_1+x_2$$

$$\Downarrow$$

$$x_1+x_2 \geqslant x_2+x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_{n-1}+x_n \geqslant x_n+x_1 \geqslant x_1+x_2$$

Ale ponieważ $x_1+x_2 = x_1+x_2$ to

$$x_1+x_2 = x_2+x_3 = \ldots = x_{n-1}+x_n = x_n+x_1 = x_1+x_2$$

Niech $k \in \mathbb{Z}_{>0} \wedge k < n$. Wtedy z powyższego mamy

$$x_{k-1}+x_k = x_k+x_{k+1}$$

$$\Downarrow$$

$$x_{k-1} = x_{k+1}$$

Czyli elementy na parzystych pozycjach są sobie równe oraz elementy na nieparzystych pozycjach są sobie równe. Lecz $a_n = a_2$, czyli gdy

$n - nieparzyste$ to jeden z elementów na nieparzystych pozycjach jest równy elementowi na parzystej pozycji. Co oznacza, że

$$x_k = x_{k+1}$$

Zatem ciągami spełniającymi warunki zadania są wszystkie te postaci

$$1^\circ \quad n - parzyste$$

$$(a, b, a, b, \dots, a, b), \quad a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$2^\circ \quad n - nieparzyste$$

$$(a, a, a, a, \dots, a, a), \quad a \in \mathbb{Z}_{>0}$$

Dla dowolnego n

$$(a, a, a, a, \dots, a, a), \quad a \in \mathbb{Z}_{>0}$$

Q.E.D