Matematyczna Liga Zadaniowa V LO

klasa pierwsza

---

1. Wykazać, że dla liczb rzeczywistych a, b, c, d spełniających warunek $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d > 0$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{\sqrt{ad}+\sqrt{bc}}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a+d}{2}\cdot\frac{b+c}{2}}\,.$$

Rozwiązanie — w pełni poprawne — nadesłała Magdalena Skrok z klasy 1a. Brawo Magda — zgarniasz całą pulę 12 punktów.

A oto nieco inne rozwiązanie od nadesłanego przez Magdę.

Po obustronnym pomnożeniu tej nierówności przez 2, daną w zadaniu nierówność możemy zapisać w postaci równoważnej

$$\sqrt{ad}+\sqrt{bc} \leqslant \sqrt{ab+ac+bd+cd}\,. \tag{1}$$

Z założenia liczby a, b, c, d są dodatnie, więc po podniesieniu obu stron nierówności (1) do kwadratu możemy ją zapisać równoważnie

$$ab+2\sqrt{abcd}+bc \leqslant ab+ac+bd+cd,$$

która po kolejnych przekształceniach przyjmuje postać

$$(\sqrt{ab}-\sqrt{cd})^2+ac+bd-ad-bc \geqslant 0,$$

$$(\sqrt{ab}-\sqrt{cd})^2+a(c-d)-b(c-d) \geqslant 0,$$

$$(\sqrt{ab}-\sqrt{cd})^2+(a-b)(c-d) \geqslant 0.$$

Z uwagi na złożenia zadania ostatnia nierówność jest prawdziwa, więc nierówność dana w zadaniu (równoważna ostatnie) również jest prawdziwa. Kończy to rozwiązanie zadania.

MAGDALENA SKROK 1A ZADANIE 18-19-1-01

Trzeba wykazać, że dla liczb $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, takich że $a \geq b \geq c \geq d > 0$ prawdą jest że:

$$\frac{\sqrt{ad}+\sqrt{bc}}{2} \leq \sqrt{\frac{a+d}{2}\cdot\frac{b+c}{2}}$$

Z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną, a kwadratową wiemy, że:

$$\sqrt{\frac{a+d}{2}\cdot\frac{b+c}{2}} \overset{(*)}{=} \sqrt{\frac{ab+ac+db+dc}{4}} \geq \underbrace{\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{db}+\sqrt{dc}}{4}}_{\text{średnia arytmetyczna liczb: } \sqrt{ab},\ \sqrt{ac},\ \sqrt{db},\ \sqrt{dc}}$$

czyli jeżeli udowodnimy że:

$$\frac{\sqrt{ad}+\sqrt{bc}}{2} \leq \frac{\overset{\sqrt{ab}}{\cancel{\sqrt{ad}}}+\sqrt{ac}+\sqrt{db}+\sqrt{dc}}{4}$$

to udowodnimy tym samym, że

$$\sqrt{\frac{a+d}{2}\cdot\frac{b+c}{2}} \geq \frac{\sqrt{ad}+\sqrt{bc}}{2}, \quad \text{bo} \quad \frac{\sqrt{ad}+\sqrt{bc}}{2} \leq \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{db}+\sqrt{dc}}{4} \leq \sqrt{\frac{a+d}{2}\cdot\frac{b+c}{2}}.$$

$$\frac{\sqrt{ad}+\sqrt{bc}}{2} \leq \frac{\overset{\sqrt{ab}}{\cancel{\sqrt{ad}}}+\sqrt{ac}+\sqrt{db}+\sqrt{dc}}{4} \quad /\cdot 4$$

$$2(\sqrt{ad}+\sqrt{bc}) \leq \overset{\sqrt{ab}}{\cancel{\sqrt{ad}}}+\sqrt{ac}+\sqrt{db}+\sqrt{dc}$$

$$2\sqrt{ad}+2\sqrt{bc} \leq \underset{\sqrt{ab}}{\cancel{\sqrt{ad}}}+\sqrt{ac}+\sqrt{db}+\sqrt{dc}$$

$$0 \leq \sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{db}+\sqrt{dc}-2\sqrt{ad}-2\sqrt{bc}$$

$$0 \leq \sqrt{a}(\sqrt{c}-\sqrt{d})+\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{d})+\sqrt{b}(\sqrt{d}-\sqrt{c})+\sqrt{c}(\sqrt{d}-\sqrt{b})$$

$$0 \leq \sqrt{a}(\sqrt{c}-\sqrt{d})+\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{d})-\sqrt{b}(\sqrt{c}-\sqrt{d})-\sqrt{c}(\sqrt{b}-\sqrt{d})$$

$$0 \leq (\sqrt{c}-\sqrt{d})(\sqrt{a}-\sqrt{b})+(\sqrt{b}-\sqrt{d})(\sqrt{a}-\sqrt{c})$$

Z treści zadania wiemy, że $a \geq b \geq c \geq d > 0$, czyli też $\sqrt{a} \geq \sqrt{b} \geq \sqrt{c} \geq \sqrt{d} > 0$

Czyli prawa strona nierówności: $0 \leq (\sqrt{c}-\sqrt{d})(\sqrt{a}-\sqrt{b})+(\sqrt{b}-\sqrt{d})(\sqrt{a}-\sqrt{c})$ ma wartość dodatnią, gdyż z każdego z nawiasów otrzymujemy liczbę dodatnią lub równą 0.

Dowodzi to, że nierówność $\frac{\sqrt{ad}+\sqrt{bc}}{2} \leq \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{db}+\sqrt{dc}}{4}$ jest prawdziwa.

Czyli $\sqrt{\frac{a+d}{2}\cdot\frac{b+c}{2}} \geq \frac{\sqrt{ad}+\sqrt{bc}}{2}$ dla $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ i $a \geq b \geq c \geq d > 0$.

Co należało udowodnić!

(*) średnia kwadratowa liczb: $\sqrt{ab}$, $\sqrt{ac}$, $\sqrt{db}$, $\sqrt{dc}$