Matematyczna Liga Zadaniowa V LO

klasa pierwsza

---

3. W trójkącie ABC, w którym kąt przy wierzchołku C jest równy 60°, dwusieczne kątów BAC i ABC przecinają boki BC i AC w punktach odpowiednio D i E. Wykazać, że jeśli I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, to $ID = IE$.

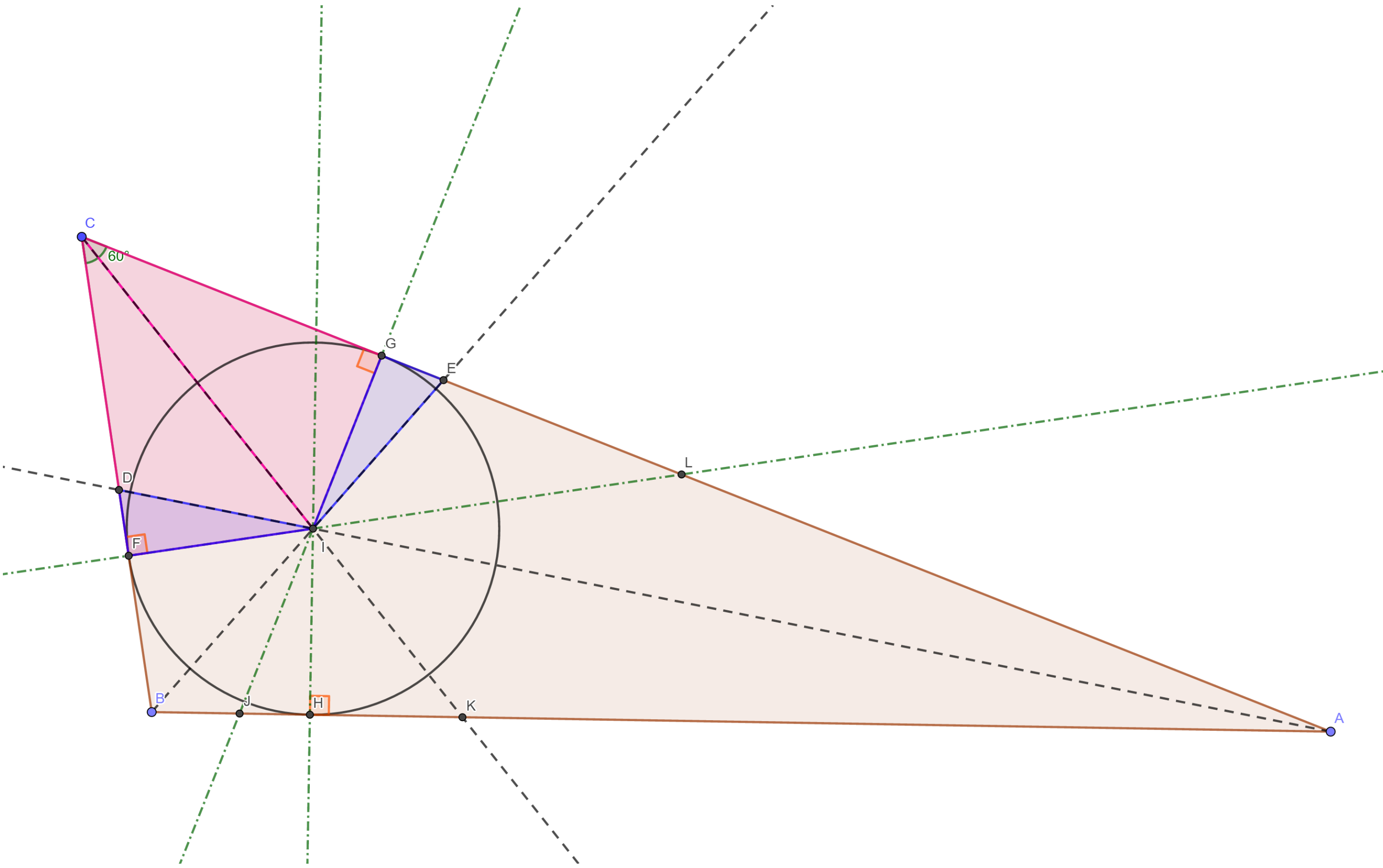
Wpłynęło tylko jedno rozwiązanie tego zadania. Jest ono w pełni poprawne. Autor tego rozwiązania — Andrzej Baziak z klasy 1a — otrzymuje komplet 12 punktów.

Andrzej Baziak kl. 1A

Zadanie 18-19-1-03

1 Wstęp

Pamiętając, że środek okręgu wpisanego w trójkąt leży na przecięciu dwusiecznych wszystkich kątów wewnętrznych tego trójkąta oraz, że promień tego okręgu jest prostopadły do danego boku w punkcie styczności sporządźmy rysunek dorysowując proste $GI \perp CA$, $FI \perp CB$ i $HI \perp BA$ (zaznaczone zieloną przerywaną linią) oraz dwusieczne kątów wewnętrznych tj. półproste CK, BE i AD (zaznaczone czarną przerywaną linią). Punkty G, H i F są punktami styczności okręgu o środku I z poszczególnymi bokami trójkąta ABC.



Rysunek 1: Rysunek do zadania

2 Rozumowanie

Aby wykazać, że odcinek ID=IE należy wykazać, że trójkąty IEG i IFD są przystające, ponieważ jeżeli figury są przystające to mają odpowiadające sobie boki tej samej długości oraz odpowiadające sobie kąty tej samej miary

Zauważmy, że:

$$IF = IG = IH = r$$

Gdzie r to promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

Kąt utworzony pomiędzy promieniem okręgu wpisanego, a bokiem trójkąta posiadający swój wierzchołek w punkcie styczności znajdującym się na tym boku jest prosty, więc:

$$\measuredangle IFD = \measuredangle IGE = \measuredangle IFB = \measuredangle IGC = 90°$$

Z treści zadania wiemy, że $\measuredangle BCA = 60°$, a półprosta CK jest dwusieczną tego kąta, więc $\measuredangle BCK = \measuredangle KCA = 30°$.

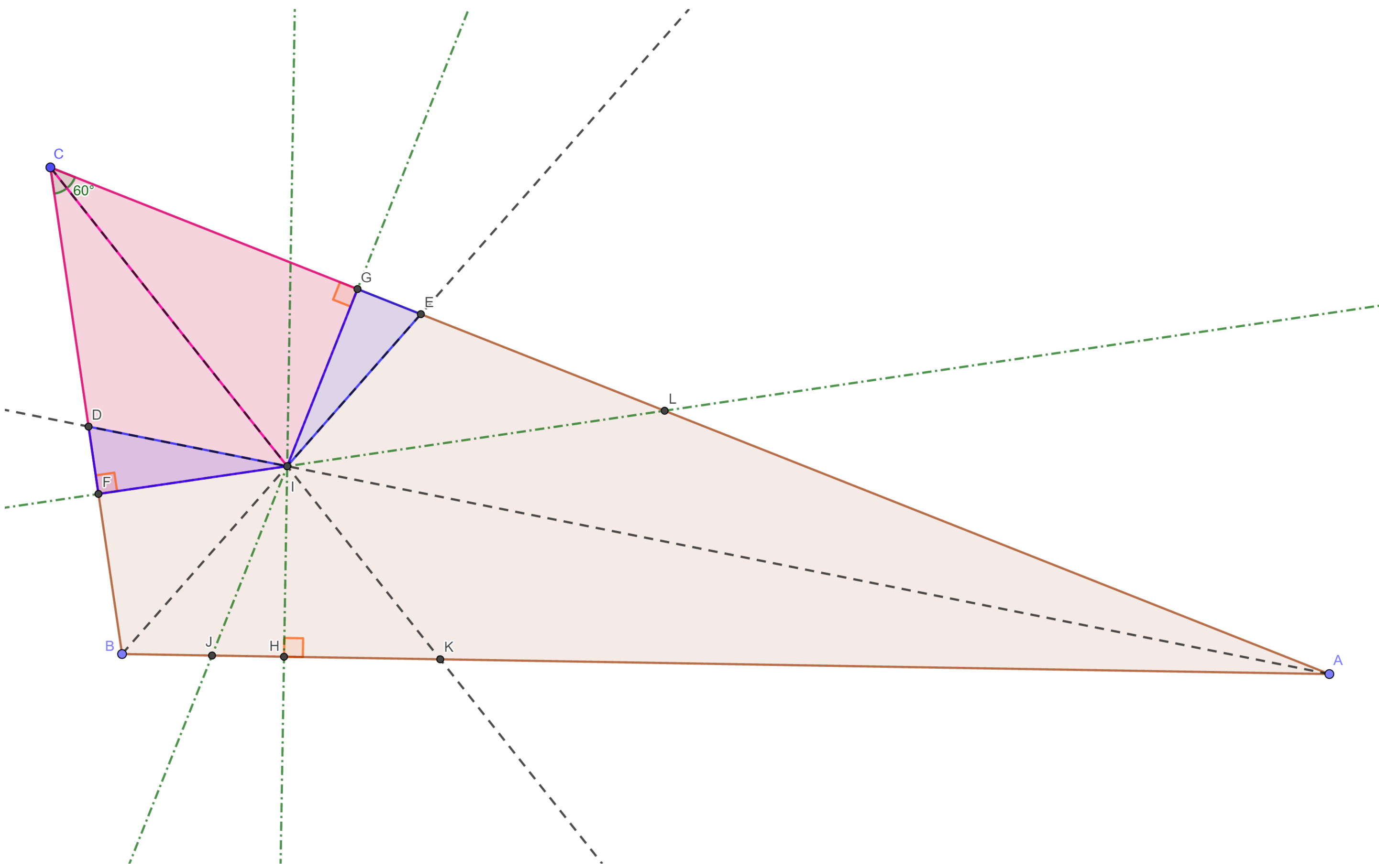
Korzystając z tego, że suma miar kątów wewnętrznych trójkąta wynosi 180° obliczmy miarę kąta GIC oraz kąta CIF:

$$\measuredangle CIF = 180° - \measuredangle IFC - \measuredangle FCI = 180° - 30° - 90° = 60°$$

$$\measuredangle GIC = 180° - \measuredangle ICG - \measuredangle IGC = 180° - 30° - 90° = 60°$$

Więc:

$$\measuredangle GIC = \measuredangle CIF$$



Rysunek 2: Rysunek bez okręgu

Oznaczmy $\measuredangle BIA = \alpha$

Półprosta BE jest dwusieczną kąta ABC, więc:

$$\measuredangle ABE = \measuredangle EBC$$

$$\measuredangle BAD = \measuredangle DAC$$

Oznaczmy $\measuredangle ABE = \measuredangle EBC = \beta$ i $\measuredangle BAD = \measuredangle DAC = \gamma$
Wiedząc, że suma miar kątów w trójkącie wynosi 180° i, że $\measuredangle BCA = 60°$ mogę obliczyć, że:

$$\begin{cases} \measuredangle ABE + \measuredangle EBC + \measuredangle BAD + \measuredangle DAC + \measuredangle BCA = 180° \\ \measuredangle ABE + \measuredangle BAD + \measuredangle BIA = 180° \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\beta + 2\gamma + 60° = 180° \\ \beta + \gamma + \alpha = 180° \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 60° \\ \alpha = 120° \end{cases}$$

Zauważmy, że kąty GIC oraz JIK są kątami wierzchołkowymi, więc:

$$\measuredangle GIC = \measuredangle JIK = 60°$$

Zauważmy, że kąty CIF oraz KIL są kątami wierzchołkowymi, więc:

$$\measuredangle CIF = \measuredangle KIL = 60°$$

Oznaczmy:

$$\measuredangle GIE = \delta$$

$$\measuredangle FID = \epsilon$$

Zauważmy, że kąty GIE oraz BIJ są kątami wierzchołkowymi, więc:

$$\measuredangle GIE = \measuredangle JIB = \delta$$

Zauważmy, że kąty FID oraz AIL są kątami wierzchołkowymi, więc:

$$\measuredangle FID = \measuredangle AIL = \epsilon$$

Dzięki powyższym spostrzeżeniom można zdefiniować miarę kąta BIA jako:

$$\measuredangle BIA = \measuredangle JIB + \measuredangle JIK + (\measuredangle KIL - \measuredangle AIL)$$

$$\alpha = \delta + 60° + (60° - \epsilon)$$

$$120° = \delta + 120° - \epsilon$$

$$0 = \delta - \epsilon$$

$$\epsilon = \delta$$

3 Podsumowanie

$\triangle IEG$ oraz $\triangle IFD$ są przystające z cechy kąt, bok, kąt, ponieważ jak przedstawiono powyżej:

$$IG = ID = r$$

$$\measuredangle FID = \measuredangle GIE$$

$$\measuredangle IFD = \measuredangle IGE$$

Więc:

$$IE = ID$$

Co należało wykazać.