Matematyczna Liga Zadaniowa V LO

klasy drugie – trzecie

---

1. Wykazać, że liczba 1 nie jest wyrazem ciągu (a_n) określonego wzorem

$$a_n = \sin\frac{(n^7-n)\pi}{14}.$$

Wpłynęło pięć rozwiązań tego zadania. Cztery były w pełni poprawne. W błędnym powołano się na równoważność

$$1 = \sin\frac{(n^7-n)\pi}{14} \iff 14 = \sin(n^7-n)\pi,$$

która jest w oczywisty sposób fałszywa.

Zadanie 18-19-2-3-1

Założenia: $(a_n) : a_n = \sin \frac{(n^7-n)\pi}{14}$; $n \in \mathbb{N}$

Teza: Liczba 1 nie jest wyrazem ciągu (a_n).

Dowód:

Załóżmy nie wprost, że istnieje taka liczba naturalna m, dla której $a_m = 1$. Rozpatrzmy a_m:

$$a_m = \sin \frac{(m^7 - m)\pi}{14} = 1$$

Zauważmy, że dla każdej liczby rzeczywistej x:

$$\sin x = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Więc:

$$\sin \tfrac{m^6(m-1)\pi}{14} = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \tfrac{m^6(m-1)}{14} = \tfrac{1}{2} + 2k \qquad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

$$m^5(m)(m-1) = 7 + 28k$$

Zauważmy, że $L = m^5(m)(m-1)$ to iloczyn liczby naturalnej m^5 oraz dwóch kolejnych liczb naturalnych. Wyrażenie to będzie więc zawsze parzyste:

$$L \equiv 0 \pmod 2$$

Prawa strona równania będzie za to nieparzysta:

$$P = 7 + 28k \equiv 1 \pmod 2$$

Jest to oczywista sprzeczność. Wynika z tego, że takie liczby m nie istnieją, co kończy dowód.