Matematyczna Liga Zadaniowa V LO

klasy drugie – trzecie

---

3. Liczby a, b, c są długościami boków trójkąta o obwodzie równym 1. Wykazać, że

$$\frac{2+a}{1-2a}+\frac{2+b}{1-2b}+\frac{2+c}{1-2c}>11.$$

Wpłynęły tylko dwa rozwiązania tego zadania. Oba w pełni poprawne.

Zadanie 18-19-2-3-03

Ponieważ liczby a, b i c są długościami boków trójkąta, to $a < b + c = 1 - a$, czyli $2a < 1$. Analogicznie $2b < 1$ i $2c < 1$.

Weźmy liczby $x = 1-2a$, $y = 1-2b$ oraz $z = 1-2c$. Ich suma jest równa $x+y+z = 1-2a+1-2b+1-2c = 3 - 2(a + b + c) = 1$. Ponadto, korzystając z uzyskanych wcześniej nierówności, otrzymujemy $x, y, z > 0$.

Teraz, przekształcając równoważnie podaną w treści zadania nierówność, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
&\frac{2+a}{1-2a} + \frac{2+b}{1-2b} + \frac{2+c}{1-2c} > 11 \\
\Leftrightarrow\quad &\frac{5-x}{x} + \frac{5-y}{y} + \frac{5-z}{z} > 22 \\
\Leftrightarrow\quad &\frac{5}{x} + \frac{5}{y} + \frac{5}{z} > 25 \\
\Leftrightarrow\quad &\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 5
\end{aligned}$$

Weźmy teraz następującą nierównoć i przekształćmy ją równoważnie (mając na uwadze, że $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z} > 0$):

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqslant 9 \\
\Leftrightarrow\quad &1 \geqslant \frac{9}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \\
\Leftrightarrow\quad &\frac{1}{3} \geqslant \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \\
\Leftrightarrow\quad &\frac{x+y+z}{3} \geqslant \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}
\end{aligned}$$

Otrzymany wynik ze względu na nierówność między średnią arytmetyczną a harmoniczną jest prawdziwy. Oznacza to, że $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqslant 9$ również jest prawdziwe. Tym bardziej prawdziwe jest $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 5$, które równoważne jest z postawioną w zadaniu nierównością.

$\square$

Zadanie 18-19-2-3-3

Założenia: $a+b+c=1$; $a,b,c\neq\frac{1}{2}$; a,b,c to boki trójkąta.

Teza: $\frac{2+a}{1-2a}+\frac{2+b}{1-2b}+\frac{2+c}{1-2c}>11$

Dowód:

Dowód będzie oparty na nierówności Jensena. Teza będzie przekształcana **równoważnie**.

Zdefiniujmy funkcję y dla $x\in\mathbb{R}_+\backslash\{\frac{1}{2}\}$:

$$y(x)=\frac{1}{1-2x}.$$

Zauważmy, że dla każdego $x\in\mathbb{D}$:

$$\frac{2+x}{1-2x}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-2x)-5}{1-2x}=-\frac{1}{2}+5\cdot\frac{1}{1-2x}=-\frac{1}{2}+5y(x)$$

Teza sprowadza się więc do:

$$-\frac{3}{2}+5\big[y(a)+y(b)+y(c)\big]>11$$

Co po równoważnym przekształceniu daje:

$$L=\frac{1}{3}\cdot y(a)+\frac{1}{3}\cdot y(b)+\frac{1}{3}\cdot y(c)>\frac{5}{6}=P$$

Rozpatrzmy, wypukłość funkcji y:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{(1-2x)^2}\cdot(-2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\cdot\frac{-1}{(1-2x)^4}\cdot 2(1-2x)\cdot(-2)=\frac{8}{(1-2x)^3}$$

Nietrudno zauważyć, że znak drugiej pochodnej warunkować będzie wyrażenie $(1-2x)$. Więc:

$$\frac{d^2y}{dx^2}<0 \text{ dla } x\in(\tfrac{1}{2};\infty) \qquad \text{lub} \qquad \frac{d^2y}{dx^2}>0 \text{ dla } x\in(-\infty;\tfrac{1}{2})$$

Zauważmy, że z nierówności trójkąta:

$$a+b>c$$

$$a + b + c > 2c$$

$$1 > 2c \iff c < \frac{1}{2}$$

i analogicznie:

$$a < \tfrac{1}{2} \text{ i } b < \tfrac{1}{2}.$$

Wynika z tego, ż liczby $a, b, c \in (-\infty; \frac{1}{2})$, a w tym przedziale druga pochodna funkcji y będzie dodatnia, co znaczy, że funkcja y będzie wypukła.

Z nierówności Jensena otrzymujęmy, że:

$$L = \frac{1}{3} \cdot y(a) + \frac{1}{3} \cdot y(b) + \frac{1}{3} \cdot y(c) \geqslant y\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = \frac{1}{1 - 2\frac{a+b+c}{3}} = 3 > \frac{5}{6} = P$$

Ponieważ nierówność równoważna tezie zachodzi, to teza jest prawdziwa, co kończy dowód.