

**Matematyczna Liga Zadaniowa V LO**  
klasy drugie – trzecie

---

**4.** Gargamel złapał w pułapkę trzy smerfy: Ciamajdę, Zgrywusa i Ważniaka. Usypał na środku swojej komnaty stos złożony z 2018 dukatów i nakazał smerfom kolejno dzielić stosy dukatów na mniejsze, jednak — ponieważ jest bardzo przesądny — zabronił dzielić stosy złożone z 13 dukatów. W jednym posunięciu smerf wybiera dowolny stos zawierający co najmniej dwa dukaty, ale niezawierający dokładnie 13 dukatów i dzieli go dowolnie na dwa niepuste stosy. Swoje posunięcia smerfy wykonują cyklicznie:

Ciamajda, Zgrywus, Ważniak, Ciamajda, Zgrywus, Ważniak, ...

Gargamel uwolni tego smerfa, który jako ostatni dokona podziału stosu dukatów.

Czy któryś ze smerfów może zapewnić sobie uwolnienie przez Gargamela niezależnie od posunięć pozostałych smerfów?

Jeśli tak, to który i jak powinien postępować w trakcie podziału stosów?

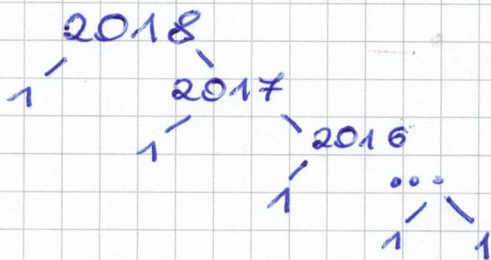
---

Wpłynęły tylko dwa rozwiązania tego zadania. Oba w pełni poprawne.

## Wojciech Bobicki 3c

1) Prześledźmy niezbędną ilość podziłów stosu złożonego z 2018 dukatów, bez uwzględnienia zakażu podziotu 13-dukotowego stosu.

- zauważmy, że każdy stos musimy dzielić, aż do momentu uzyskania samych 1-dukotowych stosów. oznacza to że sposób podziotu stosów ma wpływ na łączną ilość podziłów.
- obliczymy ilość podziłów 2018-dukotowego stosu, w przypadku, gdy będziemy zabierać z tego stosu po 1 dukacie.



Zauważmy, że będziemy musieli wykonać 2017 operacji, gdyż z ostatniej otrzymujemy automatycznie dwie jedynki.

• wyciągamy wzór na  $n$ -dukotowego stosu :  $n-1$  podzieli

2) rozważmy ile podziłów unikniemy tworząc 13 dukotowy stos :

$$13 = n, \quad n-1 = 12 \leftarrow \text{ominiemy 12 podziłów.}$$

3) Wyprowadźmy wzór na niezbędną ilość operacji 2018-dukotowego stosu

$$2017 - k \cdot 12 \quad \text{gdzie } k \text{ to liczba utworzeń 13 dukotowych stosów.}$$

4) Podzielmy to liczbę przez liczbę zwoodników

$$2017 - 12k = 3(672 + 4k) + 1$$

Reszta 1 oznacza, że ostatnią osobą dzielącą stos będzie pierwsza <sup>osoba</sup> z kolejki - czyli Ciamejdo. Udowodniliśmy, że dana sytuacja nie zależy od podziłów Ciamejdy, ani pozostałych zwoodników.

## Zadanie 18-19-2-3-04

Nazwijmy stos liczący 13 dukatów pechowym. Załóżmy najpierw, że żaden ze smerfów nie tworzy pechowego stosu. Łatwo zauważyć, że w takiej sytuacji „gra” zakończy się po 2017 posunięciach - stos 2018 dukatów właśnie tyle razy można podzielić. Weźmy teraz sytuację, w której powstaje 1 pechowy stos. Łączna liczba posunięć maleje wtedy o 12 - jest tak, ponieważ na niepodzielnym pechowym stosie potencjalnie można wykonać 12 posunięć. Dalej, w sytuacji, gdy powstają 2 pechowe stosy, łączna liczba posunięć maleje o 24, gdy powstają 3 - o 36, w ogólności dla  $n$  powstałych pechowych stosów „gra” zakończy się po  $2017 - 12n$  posunięciach.

Ponieważ reszta z dzielenia  $2017 - 12n$  przez 3 nie zależy od  $n$  i zawsze wynosi 1, to „gra” zawsze zakończy się na tym samym smerfie - będzie to pierwszy smerf, czyli Ciamajda.

